1. Sprawdź, które z poniższych zależności są prawdziwe:

(i) $$\frac{\frac{\partial d}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial i} \cdot \frac{\partial i}{\partial d}}{\frac{\partial d}{\partial i} \cdot \frac{\partial v}{\partial d} \cdot \frac{\partial i}{\partial v}} = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{1}{s_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_{\overline{n|}}} \right)$$

(ii) $$\left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d^{(m)}} \cdot \frac{a_{\overline{n|}}}{v^n}$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \cdot \frac{i^k}{k} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)!} \right\}$$

Odpowiedź:

A. tylko (i)

B. tylko (ii)

C. tylko (i) oraz (iii)

D. (i), (ii) oraz (iii)

E. żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawdziwa

Uwaga: $\frac{\partial f}{\partial x}$ oznacza pochodną funkcji f liczoną po argumencie x.

2. Inwestor rozważa *3* projekty inwestycyjne, z których każdy trwa *4 lata* i rozpoczyna się dzisiaj. W poniższej tabeli przedstawiono zakładane przepływy pieniężne dla każdego z tych projektów w podziale na lata trwania inwestycji ($\alpha_k \geq 0 \quad dla\ k \in \{1, 2, 3\}$):

Wyszczególnienie	Rok 1	Rok 2	Rok 3	Rok 4
Projekt I	$-2\alpha_1$	0	$2\alpha_1$	$4\alpha_1$
Projekt II	$-\alpha_2$	0	$3\alpha_2$	$4\alpha_2$
Projekt III	$-2\alpha_3$	$-\alpha_3$	$3\alpha_3$	$4\alpha_3$

Wyznacz maksymalną do uzyskania obecną wartość przepływów pieniężnych z zainwestowania środków (*ang. net present value*), jeżeli wiadomo że:

(i) wszystkie płatności są dokonywane zawsze na początku roku,

(ii) w każdym z pierwszych *2 lat* zainwestowano nie więcej niż *3*,

(iii) istnieje pełna dowolność w podziale inwestowanych środków pomiędzy poszczególnymi projektami,

(iv) efektywna roczna stopa procentowa przyjęta do oceny wyników inwestycyjnych wynosi $i = 12.00\%$ (*ang. annual effective interest rate*).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 8.00

B. 9.50

C. 11.00

D. 12.50

E. 14.00

3. Niech

$$r_k = \frac{15!}{k!\cdot(15-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sum_{j=1}^{5}\left(\frac{j}{4}\right)^{15-k} \qquad dla\ k \in \{0, 1, \ldots, 15\}$$

oznacza kwotę otrzymywaną na początku $(k+1)-tego$ roku z tytułu $16-letniej$ renty pewnej natychmiast płatnej, o płatnościach dokonywanych na początku każdego roku. Proszę obliczyć o ile wzrośnie wartość obecna netto tej renty (*ang. net present value*), jeśli czynnik dyskontujący $v_1 = 70.00\%$ odpowiadający efektywnej rocznej stopie procentowej (*ang. annual effective interest rate*) użytej w kalkulacji wzrośnie do wartości $v_2 = 90.00\%.$

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1 494

B. 1 694

C. 1 894

D. 2 094

E. 2 294

Uwaga: Jeśli n jest liczbą naturalną to $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ oraz $0! = 1.$

4. Bank oferuje możliwość zaciągnięcia kredytu krótkoterminowego w dowolnej wysokości L na okres jednego roku. Kredyt ten ma zostać spłacony przy użyciu jednej płatności dokonanej na końcu roku. Odsetki I mają zostać naliczone według następującego wzoru:

$$I = 0.05 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1) \cdot min\left\{max\left\{0; L - 10\,000 \cdot k\right\}; 10\,000\right\}\right).$$

Dodatkowo, na początku roku kredytobiorca musi zapłacić stałą prowizję (niezależną od kwoty udzielonego kredytu) w wysokości $\alpha = 2\,000$. Kredytobiorca rozważa zaciągnięcie kredytu w łącznej wysokości $L = 75\,000$. Ile kredytów na łączną kwotę $L = 75\,000$ powinien zaciągnąć, aby wartość obecna zapłaconych prowizji oraz odsetek była minimalna (*ang. net present value*). Przy kalkulacji wartości obecnej zapłaconych odsetek należy użyć efektywnej rocznej stopy procentowej $i = 10.00\%$ (*ang. annual effective interest rate*).

Odpowiedź:

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

E. żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawidłowa

5. Inwestor rozważa nabycie *20 – letniej* renty pewnej, ciągłej, natychmiast płatnej, o intensywności wypłat **(***ang. force of payment***)** zadanej wzorem:

$$\varphi(t) = t^2$$

Wiadomo, że w całym rozpatrywanym okresie intensywność oprocentowania jest stała i wynosi $\delta = 7.00\%$ (*ang. force of interest*). O ile mniej zapłaciłby inwestor, gdyby zrezygnował z otrzymywania płatności w ostatnim *5 – letnim* okresie wypłaty, a intensywność oprocentowania zostałaby podwyższona i wynosiłaby $\delta = 10.00\%$. Cena renty w każdym rozpatrywanym przypadku jest równa wartości obecnej tej renty (*ang. net present value*).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 589

B. 609

C. 629

D. 649

E. 669

6. Portfel inwestycyjny Zakładu Ubezpieczeń składa się z trzech rodzajów obligacji: *10 - letnich* obligacji o kuponach płatnych rocznie w wysokości *10.00%* ich wartości nominalnej (*ang. face value*), *20 - letnich* obligacji zerokuponowych oraz nieskończonych obligacji płacących co rok na końcu roku stałą kwotę (*ang. perpetuity*).

Wyznacz jaki jest udział procentowy obligacji *10 - letnich* w całym portfelu inwestycyjnym Zakładu Ubezpieczeń, jeżeli wiadomo, że:

(i) *duration* całego portfela jest równe $\overline{d}_1 = 12.00$

(ii) *duration* portfela złożonego jedynie z obligacji *20 - letnich* oraz obligacji nieskończonych wynosi $\overline{d}_2 = 15.50$,

(iii) stopa procentowa przyjęta do obliczeń wynosi $i = 10.00\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 40%

B. 43%

C. 46%

D. 49%

E. 52%

7. Maszyny *I* oraz *II* produkują ten sam produkt. Wartość Maszyny *I* w chwili zakupu wynosi $A_I = 10\,000$, natomiast jej wartość w chwili umorzenia wynosi $S_I = 1\,000$. Wiadomo też, że okres jej użytkowania jest równy $n_I = 10$ *lat*. Dodatkowo obliczono, że koszty roczne K_I w relacji do wielkości produkcji P_I dane są równaniem: $K_I = 500 + 4 \cdot P_I$. W przypadku Maszyny *II* powyższe wartości wynoszą odpowiednio: $\mathrm{A}_{\mathrm{II}} = 20\,000$, $S_{II} = 2\,000$, $n_{II} = 5$ oraz $K_{II} = 1\,000 + 2 \cdot P_{II}$.

Wyznacz przy jakiej wielkości produkcji ($P_I = P_{II}$) jednostkowe koszty wytworzenia produktu przy użyciu obydwóch maszyn są sobie równe, jeżeli do obliczeń przyjęto stopę procentową równą $i = 5.00\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1 370

B. 1 570

C. 1 770

D. 1 970

E. 2 170

8. Wyznacz obecną wartość płatności dokonywanych na końcu każdego roku przez okres *25 lat* (*ang. net present value*), jeśli wiadomo, że wysokość płatności w roku t wynosi $S(t) = t \cdot (26 - t)$. Do obliczeń przyjmij efektywną roczną stopę procentową (*ang. annual effective interest rate*) równą $i=5.00\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1 615

B. 1 635

C. 1 655

D. 1 675

E. 1 695

9. Pożyczka oprocentowana przy nominalnej rocznej stopie procentowej naliczanej kwartalnie (*ang. annual nominal interest rate convertible quaterly*) $i^{(4)}$ miała być spłacana przez okres *32 lat* za pomocą płatności dokonywanych na końcu każdego kwartału, przy czym płatności dokonywane na końcu kwartału parzystego (tj. na końcu półrocza) miały być dwa razy większe od płatności dokonywanych na końcu kwartału nieparzystego. Po zapłaceniu połowy rat wydłużono pozostały okres spłaty do *32 lat* (bez zmiany pozostałych warunków), w wyniku czego wysokość każdej raty zmniejszyła się o *20.00%*. Wyznacz stopę procentową $i^{(4)}$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 8.40%

B. 8.80%

C. 9.20%

D. 9.60%

E. 10.00%

10. Obecna cena akcji wynosi *100*. Wiadomo, że:

(i) akcja nie wypłaca dywidendy,

(ii) odchylenie standardowe zmienności ceny akcji wynosi $\sigma = 20.00\%$,

(iii) roczna stopa oprocentowania wolna od ryzyka wynosi $r_f = 12.00\%$ (*ang. annual risk – free interest rate*).

Korzystając ze *wzoru Blacka- Scholesa* wyznacz cenę *3 - miesięcznej* opcji europejskiej typu *Put* o cenie wykonania równej *93.084*.

Do obliczeń przyjmij przybliżone wartości $\Phi(x)$ - dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego:

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
$\Phi(x)$	0,5000	0,5199	0,5398	0,5596	0,5793	0,5987	0,6179	0,6368
x	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
$\Phi(x)$	0,6554	0,6736	0,6915	0,7088	0,7257	0,7422	0,7580	0,7734
x	0,8	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,15
$\Phi(x)$	0,7881	0,8023	0,8159	0,8289	0,8413	0,8531	0,8643	0,8749
x	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55
$\Phi(x)$	0,8849	0,8944	0,9032	0,9115	0,9192	0,9265	0,9332	0,9394

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 0.29

B. 0.79

C. 1.29

D. 1.79

E. 2.29

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2003 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~: .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~: ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	C	
4	B	
5	A	
6	A	
7	C	
8	A	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.