1. Na początku roku (w chwili $t = 0$) portfel pewnego funduszu inwestycyjnego składa się z *40%* obligacji typu I oraz *60%* obligacji typu II. O obligacjach typu I oraz typu II wiadomo, że:

(i) obligacja typu I płaci kupony rocznie z dołu w wysokości *4%* wartości nominalnej tej obligacji;

(ii) cena oraz *duration* obligacji typu I wyznaczone przy stopie procentowej $i = 6\%$ wynoszą odpowiednio *80%* jej wartości nominalnej oraz $d_{0,I} = 9.98$;

(iii) obligacja typu II płaci kupony rocznie z dołu w wysokości *6%* wartości nominalnej tej obligacji;

(iv) cena oraz *duration* obligacji typu II wyznaczone przy stopie procentowej $i = 6\%$ wynoszą odpowiednio *90%* jej wartości nominalnej oraz $d_{0,II} = 8.85$.

Na końcu pierwszego roku kwoty otrzymane z kuponów są reinwestowane w dwuletnie obligacje zerokuponowe.

Wyznacz *duration* d_1 portfela funduszu inwestycyjnego na początku następnego roku (w chwili $t = 1$) przy stopie procentowej $i = 6\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 7.95

B. 8.15

C. 8.35

D. 8.55

E. 8.75

2. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla opcji europejskich:

S - obecna cena akcji;

E - cena wykonania opcji;

C_E - cena europejskiej opcji call przy cenie wykonania E;

P_E - cena europejskiej opcji put przy cenie wykonania E;

n - okres do wykonania opcji.

Dla pewnej akcji wiadomo, że:

(i) $C_E = P_E$ dla $E = S$ oraz każdego $n > 0$;

(ii) dla $n = n_0$ oraz $E = S$ cena opcji call (równa cenie opcji put) wyznaczona ze wzoru Blacka – Sholesa wynosi X.

Wyznacz, ile będzie wynosić cena opcji wyznaczona ze wzoru Blacka – Sholesa w przypadku gdy:

(i) natężenie oprocentowania wzrośnie dwukrotnie;

(ii) wariancja natężenia oprocentowania zmaleje czterokrotnie;

(iii) obecna cena akcji i cena wykonania wzrosną dwukrotnie;

(iv) okres do wykonania opcji wzrośnie czterokrotnie.

Odpowiedź:

A. $\dfrac{X}{\sqrt{2}}$

B. X

C. $\sqrt{2} \cdot X$

D. $2 \cdot X$

E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

3. Rozważmy plan spłaty *40 - letniego* kredytu w nieznanej wysokości L, o którym wiadomo, że:

(i) przez pierwsze *10 lat* na końcu każdego roku spłacane będzie jedynie *25%* kwoty odsetek od oryginalnego zadłużenia;

(ii) przez kolejne *10 lat* na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od bieżącego zadłużenia;

(iii) przez ostatnie *10 lat* na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie w tym okresie zapłacone zostanie *50%* nominalnej kwoty zadłużenia.

Proszę obliczyć wysokość stałej raty płatnej na końcu każdego roku w trzecim *10 – letnim* okresie spłaty, jeśli wiadomo, że gdyby w pierwszym oraz drugim *10 – letnim* okresie spłaty na końcu każdego roku spłacane było *50%* kwoty odsetek od oryginalnego zadłużenia przy niezmienionych płatnościach w ostatnim *10 – letnim* okresie spłaty, to wynosiłaby ona *450 000.* Wiadomo ponadto, że efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) wyniesie odpowiednio *14%*, *12%*, *10%* oraz *8%* w kolejnych *10 – letnich* okresach spłaty.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 213 046
B. 233 046
C. 253 046
D. 273 046
E. 293 046

4. Rozważmy zakup jednej z dwóch rent:

Renta 1

2n + 1 – letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach r_k dokonywanych na końcu *k – tego* roku zdefiniowanych następująco:

$$r_k = \begin{cases} 1 & dla\ k = 1 \\ r_{k-1} + k & dla\ k \in \{2, 3, ..., n+1\} \\ r_{k-1} - 2n - 3 + k & dla\ k \in \{n+2, n+3, ..., 2n+1\} \end{cases}$$

Wiadomo, że największa płatność, która ma być otrzymana z tytułu tej renty wynosi *780*.

Renta 2

2n + 1 – letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach $\bar{r}_k$ dokonywanych na końcu *k – tego* roku zdefiniowanych następująco:

$$\bar{r}_k = \begin{cases} 0 & dla\ k \in \left\{10, 20, ..., 10 \cdot \left[\dfrac{2n+1}{10}\right]\right\} \\ r_k & dla\ pozostalych\ k \end{cases}$$

Ile wynosi różnica cen Renty 1 oraz Renty 2, jeśli wiadomo, że cena każdej renty jest równa wartości obecnej tej renty (*ang. present value*) obliczonej przy efektywnej rocznej stopie procentowej (*ang. annual effective inerest rate*) wynoszącej *i = 10%.*

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 89.51

B. 99.51

C. 109.51

D. 119.51

E. 129.51

5. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe?

(i) $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot i^{m}\cdot\left[\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{i^{(m)}}\right]=\delta$

(ii) $(I^{(m)}a)_{\overline{\infty|}}^{(m)}=\frac{1}{m\cdot(i^{(m)}-d^{(m)})}$

(iii) $-\delta\cdot\frac{\partial}{\partial i}(\overline{a}_{\overline{n|}})=\overline{a}_{\overline{n+1|}}-\overline{a}_{\overline{1|}}-n\cdot v^{n+1}$

Odpowiedź:

A. tylko (i)

B. tylko (ii)

C. tylko (iii)

D. (i), (ii) oraz (iii)

E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

Uwaga: W powyższych tożsamościach n oraz m są liczbami naturalnymi większymi od 0, natomiast v oraz δ oznaczają odpowiednio stopę dyskontującą oraz intensywność oprocentowania odpowiadające efektywnej stopie procentowej (ang. effective rate of return) $i>0$. $\frac{\partial}{\partial i}$ oznacza pochodną cząstkową.

6. Kredyt ma zostać pobrany przy użyciu renty pewnej natychmiast płatnej o płatnościach dokonywanych na początku każdego roku przez okres $8 - lat$. Rata kredytu pobrana na początku $k - tego$ roku będzie wynosić $r_k = \alpha \cdot k$ dla $k = 1, 2, ..., 8$. Każda rata kredytu r_k będzie spłacona poprzez $k - letnią$ rentę pewną o równych płatnościach dokonywanych co rok, przy czym pierwsza płatność z tytułu spłaty raty r_k nastąpi *5 lat* po jej wypłaceniu. Wiadomo, że na końcu *17 roku* licząc od daty otrzymania pierwszej raty kredytu r_1 kredytobiorca zapłaci odsetki w wysokości *370*.

Proszę obliczyć ile, przed zrealizowaniem jakichkolwiek płatności przewidzianych na tę datę, wynosić będzie bieżące zadłużenie kredytobiorcy na końcu *3 roku* licząc od daty otrzymania pierwszej raty kredytu r_1.

W kalkulacji przyjęto, że efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) w całym rozpatrywanym okresie wyniesie *7%*.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 5 693.34

B. 5 703.34

C. 5 713.34

D. 5 723.34

E. 5 733.34

7. Do funduszu oprocentowanego przy stopie procentowej równej *12%* na początku każdego roku dokonywana jest wpłata w wysokości *1 000*. Na końcu każdego roku dokonywana jest wypłata w wysokości *50%* obecnego stanu funduszu. Wyznacz łączną kwotę wypłaconą z funduszu od początku *6 roku* do końca *20 roku*.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 19 000

B. 19 100

C. 19 200

D. 19 300

E. 19 400

8. Pożyczka w wysokości *100 000* jest spłacana za pomocą rosnących spłat dokonywanych na końcu każdego półrocza. Pierwsza spłata wynosi *3 000*, a każda następna jest wyższa od poprzedniej o *3 000* (z wyjątkiem ostatniej raty niższej od wynikającej z podanej zależności płatnej w takiej wysokości , aby po jej zapłaceniu spłacone zostało całe pozostałe zadłużenie). Wyznacz wysokość oprocentowania zapłaconego w czwartym roku trwania umowy pożyczki. Nominalna roczna stopa procentowa naliczana kwartalnie (*ang. annual nominal interest rate convertible quarterly*) wynosi $i^{(4)} = 8\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 4 050

B. 4 150

C. 4 250

D. 4 350

E. 4 450

9. Kredyt ma zostać pobrany w formie *40 – letniej* renty pewnej natychmiast płatnej o ustalonych płatnościach w wysokości *5 000* dokonywanych na końcu każdego roku. Każda rata kredytu zostanie spłacona poprzez *30 – letnią* rentę pewną natychmiast płatną o równych płatnościach K dokonywanych na końcu każdego roku. Proszę obliczyć łączną ratę odsetkową zapłaconą na końcu *15 roku* licząc od daty pobrania ostatniej raty kredytu.
Efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) wynosi $i = 12\%$ w całym rozpatrywanym okresie.
Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 5 603
B. 5 653
C. 5 703
D. 5 753
E. 5 803

Uwaga: Jeżeli rata kredytu została pobrana w chwili t, to pierwsza rata jej spłaty K zostanie dokonana w chwili t + 1.

10. Oznaczmy przez $A(t)$ stan środków w pewnym funduszu X. Natężenie oprocentowania w tym funduszu dane jest wzorem $\delta_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$. Do funduszu w chwili $t = 0$ jest dokonywana wpłata w wysokości *1*. Wiadomo, że :

(i) $A(1) = exp(0.04)$,

(ii) $A(3) = exp(0.42)$,

(iii) $A(5) = exp(1.60)$.

Wyznacz $A(7)$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 28

B. 38

C. 48

D. 58

E. 68

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 maja 2003 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi[*]

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja[♦]
1	C	
2	D	
3	A	
4	B	
5	D	
6	E	
7	A	
8	A	
9	A	
10	D	

[*] Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
[♦] Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.