1. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe?

(i) $$-\int_0^t \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-y}|}} dy = \ln \frac{\bar{s}_{\overline{n}|} - \bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{1000} (-1)^k a_{\overline{k}|i} = a_{\overline{500}|2i}$$

(iii) $$\frac{(Ia)^{(m)}_{\overline{n}|}}{i \cdot (Ia)_{\overline{n}|}} = \frac{\delta^2 \cdot (\bar{I}\bar{a})_{\overline{\infty}|}}{i^{(m)}}$$

Odpowiedź:

A. tylko (i) oraz (ii)

B. tylko (i) oraz (iii)

C. tylko (ii) oraz (iii)

D. (i), (ii) oraz (iii)

E. żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

2. Inwestor rozważa zakup 20-letniej obligacji o wartości nominalnej 1000 zł, która wypłaca kupony na koniec każdego roku. Wiadomo, że wysokość pierwszego kuponu wynosić będzie 75 zł, a każdy kolejny będzie o 3% większy od poprzedniego. Obligacja zostanie wykupiona za 1050 zł. Ile powinien zapłacić za obligację inwestor, jeżeli spodziewa się uzyskać roczną stopę zwrotu z inwestycji 8.25%?

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 985

B. 1000

C. 1055

D. 1115

E. 1142

3. Inwestor posiada 400 akcji spółki X. Wariancja stopy zwrotu z akcji spółki X wynosi 1. Inwestor rozważa zakup akcji spółki Y, dla której wariancja stopy zwrotu wynosi 2,25. Kowariancja pomiędzy stopami zwrotu z obu akcji wynosi 0,53. Inwestor mierzy ryzyko inwestycji odchyleniem standardowym stopy zwrotu ze swojego portfela. Jak zmieni się ryzyko inwestycji, jeżeli inwestor sprzeda 100 akcji spółki X i kupi 100 akcji spółki Y?

Odpowiedź:

A. wzrośnie o 5%

B. spadnie o 5%

C. spadnie o 10%

D. spadnie o 7%

E. wzrośnie o 7%

4. Wyznacz *duration* nieskończonego ciągu płatności dokonywanych na końcu każdego roku jeżeli wysokość płatności w chwili t wynosi $2t+3$. Obliczeń dokonaj przy stopie procentowej $i=5\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 39,0

B. 39,5

C. 40,0

D. 40,5

E. 41,0

5. Kapitał początkowy K zostaje zainwestowany na n lat. Odsetki od kapitału początkowego K będą naliczane co rok przy efektywnej rocznej stopie oprocentowania i i natychmiast reinwestowane w trzech funduszach na okres pozostający do końca trwania inwestycji. Niech A_k oznacza odsetki od kapitału początkowego K naliczone na końcu k-tego roku i niech z_k oznacza udział kwoty zainwestowanej w I funduszu na końcu k-tego roku w całkowitej kwocie odsetek A_k. W II funduszu na końcu k-tego roku reinwestowane jest $(1-z_k)\cdot\frac{[n-(k-1)]}{n+1}\cdot A_k$. Pozostała część każdej raty odsetkowej A_k reinwestowana jest w III funduszu. Wiadomo, że efektywne roczne stopy oprocentowania w trzech funduszach wynoszą odpowiednio j_1, j_2 oraz j_3. Ponadto przyjęto założenie, że $z_k = z$ jest stałe w całym okresie trwania inwestycji.

Po upływie n lat następuje wypłata kapitału początkowego K wraz z kwotą zgromadzoną na rachunkach w trzech funduszach.

Proszę wskazać wyrażenie odpowiadające efektywnej średniorocznej stopie zwrotu z tej inwestycji.

Odpowiedź:

A. $$\left\{z\cdot i\cdot s_{\overline{n|}j_1}+\frac{(1-z)}{n+1}\cdot i\cdot\left[\frac{n\cdot(1+j_2)^n-s_{\overline{n|}j_2}}{j_2}+\frac{s_{\overline{n+1|}j_3}-(n+1)}{j_3}\right]+1\right\}^{\frac{1}{n}}-1$$

B. $$\left\{z\cdot i\cdot s_{\overline{n|}j_1}+\frac{(1-z)}{n+1}\cdot i\cdot\left[\frac{n\cdot(1+j_2)^n-s_{\overline{n+1|}j_2}}{j_2}+\frac{s_{\overline{n+1|}j_3}-(n+1)}{j_3}\right]+1\right\}^{\frac{1}{n}}-1$$

C. $$\left\{z\cdot i\cdot s_{\overline{n|}j_1}+(1-z)\frac{(1-z)}{n+1}\cdot i\cdot\left[\frac{n\cdot(1+j_2)^n-s_{\overline{n|}j_2}}{j_2}+\frac{s_{\overline{n|}j_3}-(n+1)}{j_3}\right]+1\right\}^{\frac{1}{n}}-1$$

D. $$\left\{z\cdot i\cdot s_{\overline{n|}j_1}+\frac{(1-z)}{n}\cdot i\cdot\left[\frac{n\cdot(1+j_2)^n-s_{\overline{n|}j_2}}{j_2}+\frac{s_{\overline{n|}j_3}-n}{j_3}\right]+1\right\}^{\frac{1}{n}}-1$$

E. żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawidłowa

6. Kredytobiorcy A, który zaciągnął w banku kredyt w wysokości L przedstawiono dwa warianty sposobu spłaty zadłużenia:

Wariant 1

Zadłużenie ma być spłacone poprzez 20 - letnią rentę pewną natychmiast płatną o płatnościach R_k dokonywanych na końcu roku, skalkulowanych przy efektywnej rocznej stopie oprocentowania i = 5% i spełniających następujące warunki:

$$\begin{cases} R_1 = P \\ R_k - R_{k-1} = Q_1 \qquad dla\ k \in \{2, 3, ..., 20\} \end{cases}$$

Wariant 2

Zadłużenie ma być spłacone poprzez 20 - letnią rentę pewną natychmiast płatną o płatnościach V_k dokonywanych na końcu roku, skalkulowanych przy efektywnej rocznej stopie oprocentowania j = 3% i spełniających następujące warunki:

$$\begin{cases} V_1 = P \\ V_{k-1} - V_k = 2 \cdot Q_2 \qquad dla\ k \in \{2, 3, ..., 20\} \end{cases}$$

Wiadomo, że $4 \cdot R_{10} + 3 \cdot R_{11} - 60 \cdot Q_1 = 2 \cdot V_5 + 5 \cdot V_6 + 72 \cdot Q_2$.

Kredytobiorca B, który zaciągnął w banku kredyt w wysokości 85 000 zł będzie go spłacał poprzez 20 - letnią rentę pewną natychmiast płatną i ciągłą o stałej rocznej intensywności ($P + 20 \cdot Q_1 + 20 \cdot Q_2$) skalkulowanej przy efektywnej rocznej stopie procentowej k = 6%. Proszę policzyć wysokość kredytu L.

UWAGA! W celu uniknięcia rozbieżności wszelkie obliczenia należy wykonać z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 78 000

B. 80 000

C. 82 000

D. 84 500

E. 86 000

7. Rozważmy kredyt który ma być pobrany w formie n – letniej renty pewnej natychmiast płatnej o ustalonych płatnościach R dokonywanych na końcu roku. Każda rata kredytu zostanie spłacona poprzez n – letnią rentę pewną natychmiast płatną o ustalonych płatnościach K dokonywanych na końcu roku. Proszę podać ile wynosi iloraz łącznej raty odsetkowej i łącznej raty kapitałowej składających się na łączną ratę spłaty kredytu dokonaną na końcu k – tego roku ($0 < k \le n$) licząc od chwili pobrania ostatniej raty kredytu.

UWAGA! Jeżeli rata kredytu R została pobrana w chwili t, to pierwsza rata spłaty K zostaje dokonana w chwili t + 1.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. $\dfrac{(1-v)\cdot(n-k)-v\cdot(1-v^{n-(k-1)})}{v\cdot(1-v^{n-(k-1)})}$

B. $\dfrac{(1-v)\cdot(n-(k-1))-v\cdot(1-v^{n-(k-1)})}{v\cdot(1-v^{n-(k-1)})}$

C. $\dfrac{(1-v)\cdot(n-k)-v\cdot(1-v^{n-k})}{v\cdot(1-v^{n-k})}$

D. $\dfrac{(1-v)\cdot(n-(k+1))-v\cdot(1-v^{n-(k+1)})}{v\cdot(1-v^{n-(k+1)})}$

E. żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawidłowa

8. Bank oferuje możliwość zawarcia kredytu na jeden rok na następujących warunkach:

(i) pożyczkobiorca płaci jednorazową prowizję $\alpha = 500$ zł (której wysokość jest ustalona i nie zależy od wysokości kredytu) w momencie podjęcia kredytu,

(ii) kwota kredytu wraz z należnymi odsetkami zostaje spłacona na końcu roku,

(iii) wysokość należnych odsetek zostaje obliczona według następującego wzoru:

$$I = 0{,}1 \cdot K + 0{,}01 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \max(K - 10\,000 \cdot (k-1); 0);$$

gdzie:

K – oznacza kwotę kredytu,

I – oznacza wysokość należnych odsetek.

Pożyczkobiorca chce zaciągnąć łączny kredyt w wysokości 100 000 zł.

Policz ile kredytów powinien on zaciągnąć (na łączną kwotę 100 000 zł.) aby koszt łącznego kredytu (prowizje oraz odsetki) był minimalny przy założeniu, że wysokości poszczególnych kredytów są dobierane optymalnie.

Odpowiedź:

A. 2

B. 3

C. 5

D. 7

E. 9

9. Krzywa rentowności (ang. *yield curve*) określona jest zależnością $i_t = 0.04 + {}^t\!/_{100}$.

Wyznacz stopy procentowe typu *spot* w następnym roku i wypełnij poniższą tabelę.

t	$i_t^{(1)}$
1	?
2	?

gdzie t oznacza okres inwestycji.

UWAGA! Użyj stóp typu forward oraz unbiased expectations theory.

Odpowiedź:

A

t	$i_t^{(1)}$
1	5.5%
2	6%

B

t	$i_t^{(1)}$
1	6%
2	7%

C

t	$i_t^{(1)}$
1	7%
2	8%

D

t	$i_t^{(1)}$
1	7.5%
2	8%

E

t	$i_t^{(1)}$
1	7%
2	9%

10. Dla funduszu *A* natężenie oprocentowania wynosi $\delta_t = \frac{1}{t+1}$, natomiast dla funduszu *B* $\delta_t = \frac{2t}{t^2+1}$. W chwili $t = 0$ inwestujemy 100 000 zł w każdy z funduszy. Jeżeli $A(t)$ oznacza kwotę zgromadzoną w chwili *t* w funduszu *A*, natomiast $B(t)$ w funduszu *B* znajdź *T* dla którego funkcja $C(t) = A(t) - B(t)$ osiąga maksimum.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1/5

B. 1/4

C. 1/3

D. 1/2

E. 1

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2001 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ......Klucz   odpowiedzi................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	B	
4	B	
5	A	
6	A	
7	B	
8	B	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.