Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLIV Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 3 grudnia 2007 r.

1. Rozważmy populację w której śmiertelnością rządzi prawo Weibulla:

$$\mu_x = kx \quad \text{gdzie} \quad k > 0.$$

Niech x_{max} oznacza wiek największej śmiertelności tzn. wiek w którym gęstość rozkładu trwania życia noworodka wziętego z tej populacji ma maksymalną wartość.
Wówczas

$$\frac{\dot{e}_0}{x_{max}}$$

wynosi (wskaż najbliższą wartość):

(A) 1,15331 (B) 1,20331 (C) 1,25331 (D) 1,30331
(E) 1,35331

2. Rozważamy ubezpieczenie rosnące ciągłe dla (x). Wypłaci ono uposażonym sumę ubezpieczenia t w chwili śmierci ubezpieczonego, jeśli nastąpi ona w wieku $x+t$. Ubezpieczony opłaca składki za pomocą ciągłej renty życiowej składek $\pi(t)$ rosnących według wzoru:

$$\pi(t) = \overline{P}(x)t$$

(tak więc intensywność płaconej składki wzrasta liniowo o $\overline{P}(x)$ w skali roku). Funkcja $\overline{P}(x)$ spełnia równanie różniczkowe

(A) $\frac{d}{dx}\overline{P}(x) = \left(\overline{P}(x) + \delta\right)\left(\overline{P}(x) - \overline{P}(\overline{A}_x)\right)$

(B) $\frac{d}{dx}\overline{P}(x) = \left(\overline{P}(x) + \delta\right)\left(\overline{P}(x) - \overline{A}_x\right)$

(C) $\frac{d}{dx}\overline{P}(x) = \left(\overline{P}(x) + \delta\right)\left(\overline{P}(x) - \overline{a}_x\right)$

(D) $\frac{d}{dx}\overline{P}(x) = \left(\overline{P}(x) + \delta\right)\left(\overline{P}(\overline{A}_x)\,\overline{P}(x) - 1\right)$

(E) Żaden z powyższych wzorów nie jest prawdziwy.

3. (65) wybrany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 100$ rozważa zakup za jednorazową składkę netto $SJN = 100000$ jednej z następujących polis emerytalnych:

- PE1 jest zwykłą indywidualną rentą dożywotnią ciągłą płacącą ze stałą intensywnością $E1$ rocznie aż do śmierci,
- PE2 polega na wypłacaniu renty dożywotniej ciągłej ze zmienną intensywnością daną wzorem:

$$\pi(t) = \frac{\overline{V}(t)}{\mathring{e}_{65+t}} \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < 35;$$

  i dodatkowej wypłacie uposażonym rezerwy $\overline{V}(t)$, gdy ubezpieczony umrze w wieku $65 + t$.

Dane jest $\delta = 0{,}03$. Wówczas

$$\frac{E1}{\pi(10)}$$

wynosi (wskaż najbliższą wartość):

(A) 1,330 (B) 1,380 (C) 1,430 (D) 1,480
(E) 1,530

4. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie dla (35), które wypłaci uposażonym 100000 zł na koniec roku śmierci. Ubezpieczony płaci składki w postaci renty dożywotniej w wysokości P na początku każdego roku. Dane są:

$$i = 4\%,$$
$$q_{55} = 0{,}01562 \quad , \quad q_{56} = 0{,}01692$$
$$\pi_{20}^{r} = 1030{,}48 \quad , \; \pi_{21}^{r} = 1089{,}05 \quad .$$

Oblicz P. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 1438 (B) 1488 (C) 1538 (D) 1588
(E) 1638

5. (x) należy do populacji wykładniczej z $\mu_{x+t} \equiv 0{,}01$ i zaciągnął kredyt w wysokości $K = 400000$. Będzie go spłacał przez najbliższe $n = 30$ lat w formie renty ciągłej 30-letniej o odpowiednio dobranej stałej intensywności rocznej R. Intensywność oprocentowania kredytu jest stała w czasie i wynosi $0{,}04$.
Nasz kredytobiorca musi ubezpieczyć ryzyko niespłacenia kredytu z powodu przedwczesnej śmierci (tzn. śmierci przed osiągnięciem wieku $x + 30$). Będzie płacił składki za to ubezpieczenie w formie renty życiowej ciągłej 30-letniej z intensywnością netto daną wzorem:
$$\pi(t) = a - bt \quad \text{dla} \quad t \in [0{,}30]$$
przy czym a i b są tak dobrane, że dla każdego $t \in [0{,}30]$ zachodzą nierówności:
$$\pi(t) \geq 0 \text{ oraz } V(t) \geq 0$$
gdzie $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach. Techniczna intensywność oprocentowania używana do kalkulacji składek i rezerw wynosi $\delta = 0{,}04$.
Oblicz a. Wskaż najbliższą wartość.

(A)	4190	(B)	4290	(C)	4390	(D)	4490
(E)	4590						

6. Rozważamy 25-letnie ubezpieczenie rentowe, w którym śmierć ubezpieczonego (40) odwraca kierunek płatności. Płatności przypadają na początek kolejnego roku ubezpieczenia; gdy są składką, mają wysokość P, a gdy rentą pośmiertną, mają wysokość 10 000. Po zawarciu umowy ubezpieczenie jest nieodwołalne i składki są płacone z konta depozytowego.

W momencie wystawienia polisy ubezpieczyciel ustala sobie plan rezerw na cały okres ubezpieczenia. Podaj wysokość rezerwy netto liczonej z 10-letnim wyprzedzeniem. Dane są: v=0,95

D_{40}= 120 720	D_{50}= 67 525	D_{65}= 23 065
N_{40}=1 818 855	N_{50}=872 015	N_{65}= 210 865
l_{40}= 939 370	l_{50}= 877 590	l_{65} = 47 010 .

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 7 900 (B) 8 000 (C) 8 100 (D) 8 200
(E) 8 300

7. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie wypłacające 10 000 zł na koniec roku śmierci. Składka jest płacona na początku roku, w stałej wysokości, przez cały okres ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel poniósł koszty początkowe oraz ponosi na początku każdego roku ubezpieczenia stałą kwotę kosztów administracyjnych. W pierwszym roku bieżące płatności z tytułu obydwu kosztów przekroczyły o 500 zł poziom składki brutto. Wiadomo, że na moment wystawienia polisy strumień kosztów administracyjnych jest równoważny kosztowi początkowemu.

Wyznacz udział narzutu na koszty w składce brutto, jeśli dane są:

$$i = 4\% \qquad \ddot{a}_x = 11{,}48$$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 27,6% (B) 27,9% (C) 28,2% (D) 28,5%
(E) 28,8%

8. Pracodawca rekrutuje pracowników na 10-letni okres: 2 lata próbnego zatrudnienia, potem 8 lat zatrudnienia na stałe. W momencie zatrudnienia zakupuje wszystkim pracownikom ubezpieczenie, wypłacające – ale tylko pracownikom, którzy osiągnęli stałe zatrudnienie – świadczenie za śmierć w okresie zatrudnienia w wysokości 100 000 lub 10 000 z tytułu zwolnienia. Świadczenia są płatne w momencie zdarzenia.

Dane na temat ubytków w okresie próbnym pochodzą z tablic niezależnych ubytków. Średnia (centralna) stopa zwolnień wynosi $m^{(w)} = 0{,}06$ rocznie, a intensywność śmiertelności $\mu^{(s)} = 0{,}025$. Zwolnienia mają jednostajny rozkład w ciągu roku.

Dane dla okresu stałego zatrudnienia uwzględniają wykluczanie się ubytków. Intensywność zwolnień jest stała i wynosi $\mu^{(w)} = 0{,}03$, a intensywność śmiertelności $\mu^{(d)} = 0{,}02$.

Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie dla $\delta = 0{,}05$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 9 480 (B) 9 530 (C) 9 580 (D) 9 620
(E) 9 670

9. Trzej bracia, po śmierci ojca, korzystają z wykupionej za jednorazową składkę polisy posagowej, wypłacającej rentę ciągłą z intensywnością 1000 zł na rok. Polisa wypłaca w danym momencie rentę tylko jednemu z nich, temu który:

- jest najstarszy, spośród uprawnionych braci, ale nie przekroczył 20 lat,
- w chwili gdy uprawnienie przechodzi na niego ma wiek [6 ; 15) lat.

Wypłaty mogą być zawieszane do czasu nabycia uprawnień przez kolejną osobę. Obecnie bracia są w wieku (x=17), (y=7) oraz (z=3) i rentę uzyskuje (x). Wyznacz obecną wysokość rezerwy netto związanej z ewentualnymi wypłatami dla (z). Bracia pochodzą z populacji o z wykładniczym rozkładem trwania życia z parametrem $\mu = 0{,}02$, a techniczne oprocentowanie wynosi $\delta = 0{,}03$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 1345 (B) 1385 (C) 1425 (D) 1465
(E) 1505

10. Plan emerytalny składa się z części (1) typu *contribution-defined* oraz z części (2) *benefit-defined*. W pierwszej części płacona jest składka w wysokości 8% wynagrodzenia. Druga część dopełnia łączną emeryturę do 60% płacy finalnej, czyli płacy z ostatniego roku zatrudnienia.
Rozważ 40-letniego uczestnika planu(urodzonego 1 stycznia) z płacą rosnącą o 4% na początku każdego roku i wynoszącą obecnie (po tegorocznej podwyżce) 40 000 zł oraz z kapitałem w planie (1) w wysokości 50 000. Przyjmij, że składka jest płacona raz w roku, w połowie roku. Zakładając przejście na emeryturę w wieku 65 lat, podaj udział emerytury z pierwszej części planu w całej emeryturze. Dane jest oprocentowanie techniczne

$i = 4\%$ oraz $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 11{,}43$.

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 48,4% (B) 48,7% (C) 49,0% (D) 49,3%

(E) 49,6%

XLIV Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi..............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	C	
4	B	
5	E	
6	C	
7	B	
8	E	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.