1. W populacji *B* natężenie wymierania $\mu_x^{(B)}$ jest większe od natężenia wymierania $\mu_x^{(A)}$ w populacji *A*, jednostajnie o $\mu > 0$, dla każdego wieku x tzn. $\mu_x^{(B)} - \mu_x^{(A)} = \mu$. Niech ponadto $M(s)$ oznacza funkcję tworzącą momenty zmiennej $T(x)$, dla pewnego wieku x, w populacji *A*. Wówczas $\overset{\circ}{e}{}_x^{(B)}$ wyraża się wzorem:

(A) $\frac{1}{\mu}(1 - M(-\mu))$,

(B) $\frac{1}{\mu}(1 - M(-\frac{\mu^2}{2}))$,

(C) $\frac{1}{\mu}(1 - M(-\mu + \frac{\mu^2}{2}))$

(D) $\frac{1}{\mu}(1 - M(-e\mu))$

(E) wśród powyższych nie ma dobrej odpowiedzi.

2. Dane jest ubezpieczenie bezterminowe na życie, które wypłaca 20 000 zł, jeśli ubezpieczony umrze w ciągu najbliższych 30 lat lub 12 000 zł, jeśli umrze później. Świadczenie wypłacane jest w chwili śmierci . Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia obliczoną przy technicznej intensywności oprocentowania $\delta = 0{,}03$. Oblicz $Var(Z)$, jeśli wiadomo, że $\mu_x = const \equiv 0{,}01$. Podaj najbliższą odpowiedź.

(A) 27 000 000 (B) 30 000 000 (C) 33 000 000 (D) 36 000 000
(E) 39 000 000.

3. Rozważamy następujące dwa ubezpieczenia dyskretnego typu:

P1 20-letnie na życie i dożycie dla (40) z sumą ubezpieczenia 1,

P2 35-letnie na życie i dożycie dla (40) z sumą ubezpieczenia 1.

Wiadomo, że stosunek wariancji straty ubezpieczyciela dla P2 do wariancji straty ubezpieczyciela dla P1 wynosi 2,571429 w przypadku zakupu tych polis za składki jednorazowe netto oraz wynosi 1,746143 w przypadku płacenia regularnych składek netto przez cały okres ubezpieczenia. Składka jednorazowa netto za P1 wynosi 0,334327. Techniczna stopa oprocentowania wynosi $i = 6\%$. Oblicz składkę jednorazową netto za P2 (podaj najbliższą wartość).

(A) 0,19 (B) 0,21 (C) 0,23 (D) 0,25
(E) 0,27

4. Rozważamy dwa rodzaje ubezpieczeń terminowych dyskretnego typu:

T1 20-letnie na życie dla 30-latka z sumą ubezpieczenia 1,

T2 20-letnie na dożycie dla 30-latka z sumą ubezpieczenia 1.

Oba opłacane są za pomocą regularnych składek netto. Niech $\pi_{12}^{(r)}(T1)$, $\pi_{12}^{(r)}(T2)$ oznaczają ryzyko-składki zawarte w 13. regularnej składce kontraktu (odpowiednio) T1, T2. Dane są:

$$\frac{\pi_{12}^{(r)}(T1)}{\pi_{12}^{(r)}(T2)} = -1{,}881996 \quad , \quad \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 12{,}973599 \qquad \ddot{a}_{43:\overline{7}|} = 6{,}031501 \qquad .$$

Rezerwy składek netto dla T1 oraz T2, po 13 latach, wynoszą odpowiednio (wskaż najbliższe wartości):

(A) 0,004 oraz 0,531 (B) 0,006 oraz 0,529 (C) 0,008 oraz 0,527

(D) 0,010 oraz 0,525 (E) 0,006 oraz 0,523

5. Ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu dla (x) jest opłacane za pomocą ciągłej renty życiowej regularnych składek w wysokości $\pi(t) = const \equiv 1$. Wiadomo, że wiek graniczny (nieprzekraczalny) w rozważanej populacji wynosi $\omega = x + 1$. Ponadto dla $t \in [0,1)$ zachodzi zależność

$$\pi^s(t) = \frac{t}{1-t}\pi^r(t)$$

Niech $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po czasie t. Oblicz granicę funkcji $V(t)$, gdy t dąży do 1 (podaj najbliższą wartość).

Wiadomo, że $\delta = 0{,}025$.

(A) 0,45 (B) 0,50 (C) 0,55 (D) 0,60
(E) 0,65

6. Rozważamy dożywotnie ubezpieczenie rentowe dla (40). Przez następne 25 lat (lub krócej w przypadku wcześniejszej śmierci) będzie on płacić roczną regularną składkę brutto P^{br}. Po dożyciu wieku 65 lat zacznie otrzymywać coroczną rentę w wysokości 1 zł netto (na początku roku). A oto identyfikacja wszystkich kosztów:

- jednorazowe koszty akwizycji wynoszą $\alpha = 0{,}5$ zł.
- koszt poboru składki lub wypłaty emerytury wynosi $\beta = 1\%$ przekazywanej kwoty,
- roczne koszty obsługi ubezpieczenia, ponoszone każdorazowo na początku roku, przez cały okres ubezpieczenia wynoszą $\gamma = 0{,}02$ zł.

Oblicz P^{br}, jeśli dane są:

$$\ddot{a}_{40:\overline{25|}} = 14{,}336139 \quad , \quad {}_{25|}\ddot{a}_{40} = 2{,}862772 \quad .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,25 (B) 0,30 (C) 0,35 (D) 0,40
(E) 0,45

7. Rozważmy ubezpieczenie na wypadek śmierci dla (35). Jeśli ubezpieczony zginie w wypadku (J=2), to zostanie wypłacona suma ubezpieczenia 300 000 zł; jeśli umrze z innych przyczyn (J=1), zostanie wypłacone 120 000 zł (w obydwu przypadkach na koniec roku śmierci). Dane są:

$$q_{1,55} = 0{,}01 \qquad q_{2,55} = 0{,}001 \ .$$

Wiadomo ponadto, że cała ryzyko-składka zawarta w 21. składce wynosi $\pi^{r}_{20} = 590{,}476190$ oraz, że

$$Var(\Lambda_{20} | K \geq 20) = 58064000 \ .$$

Oblicz ryzyko-składkę (w 21. składce) pokrywającą ryzyko śmierci w wypadku $\pi^{r}_{2,20}$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 170 (B) 180 (C) 190 (D) 200
(E) 210

8. Ubezpieczenie wdowie dla małżeństwa działa w następujący sposób:

- jeśli on (y) umrze wcześniej niż ona (x), to ona zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią wdowią (ciągłą) z intensywnością 1 na rok,
- jeśli ona umrze wcześniej niż on, on otrzymuje jednorazowo, w chwili jej śmierci, zwrot wniesionych składek bez odsetek.

Składka za to ubezpieczenie płacona jest w postaci renty ciągłej, z intensywnością $\overline{P}$ na rok, aż do pierwszej śmierci. Oblicz $\overline{P}$. Dane są:

$$\mu_{x+t} \equiv 0{,}01 \quad , \quad \mu_{y+t} \equiv 0{,}02 \quad , \quad \delta = 0{,}03.$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,4 (B) 0,5 (C) 0,6 (D) 0,7
(E) 0,8

9. Rozważmy polisę dla pary (x) i (y), która zacznie wypłacać rentę dożywotnią ciągłą dla (x) po 20 latach, z intensywnością 1 na rok. Przez pierwsze 20 lat (y) będzie płacić składkę w postaci renty życiowej ciągłej. Dane są :

$$\mu_{x+t} \equiv 0{,}025 \quad , \quad \mu_{y+t} \equiv 0{,}015 \quad , \quad \delta = 0{,}03.$$

Oblicz wariancję straty ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy. Uwzględnij w płaconej składce narzut na ryzyko ubezpieczyciela w wysokości 10% składki netto. Zakładamy, że zmienne losowe $T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne. Podaj najbliższą wartość.

(A) 36 (B) 39 (C) 42 (D) 45
(E) 50

10. W pewnym planie emerytalnym wszyscy uczestnicy przystępują do planu w wieku 25 lat oraz przechodzą na emeryturę w wieku 65 lat. Nowi uczestnicy dopływają do planu w sposób ciągły z roczną intensywnością rosnącą w tempie 2% na rok.

Utrzymywanie aktywnego statusu w planie opisuje funkcja $s(x) = \frac{125 - x}{100}$, gdzie x jest wiekiem uczestnika, $25 \le x < 65$.

Podaj, na początek 2000 roku, procentowy udział osób w wieku między 30 a 40 lat w całej zbiorowości aktywnych uczestników tego planu. Przyjmij, że plan istnieje co najmniej od początku 1960 roku.

Podaj najbliższą wartość.

(A) 26,5% (B) 28% (C) 29,5% (D) 31%
(E) 32,5%

XXVII Egzamin dla Aktuariuszy z 12 października 2002 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	A	
4	C	
5	B	
6	A	
7	E	
8	C	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.