1. (x) oraz (y) należą do tej samej populacji, przy czym $y \geq x + 4$. Oznaczmy $T(x) = K(x) + S(x)$ dla życia (x) i odpowiednio dla życia (y). Oszacuj prawdopodobieństwo warunkowe $p = \Pr(S(x) < 2S(y) | K(x) \leq K(y) + 2)$. Zakładamy, że oba życia są niezależne oraz, że można stosować założenie UDD (o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku).

(A) $p \in (0.5, 0.6)$ (B) $p \in (0.6, 0.7)$ (C) $p \in (0.7, 0.8)$

(D) $p \in (0.8, 0.9)$ (E) dane nie pozwalają na udzielenie odpowiedzi.

2. Niech Z oznacza wartość na moment wystawienia polisy 1 zł, wypłacanej w momencie śmierci (x). O zmiennej losowej $T(x)$ zakładamy, że ma rozkład typu gamma z gęstością

$$g(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$$

Dane są

$E(Z) = 0{,}1111$ oraz $E(Z^2) = 0{,}0400$.

Oblicz $E(Z^3)$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

(A) 0,010 (B) 0,015 (C) 0,020 (D) 0,025
(E) 0,030.

3. Rozważamy ciągłe, bezterminowe ubezpieczenie dla (x) z sumą ubezpieczenia 1. Ubezpieczenie to jest odroczone na m lat, a w okresie odroczenia płacone są składki z roczną intensywnością netto $\overline{P}(m)$. Dane są $\mu_{x+t} = const = 0{,}02$ oraz $\delta = 0{,}03$. Oblicz m spełniające warunek $\overline{P}(m) = 1$.

(A) 0,4 (B) 0,8 C) 1,2 (D) 1,6

(E) 2

4. Oto pewne zależności między funkcjami komutacyjnymi:

(1) $C_x = vD_x - D_{x+1}$.

(2) $M_x = D_x - dN_x$.

(3) $R_x = N_x - dS_x$.

Które są prawdziwe?

(A) tylko (1) (B) tylko (2) (C) tylko (1) i (2)

(D) tylko (2) i (3)

(E) żadna z odpowiedzi (A), (B), (C), (D) nie jest prawdziwa

5. Ubezpieczenie rentowe dla (x) rozpoczyna po 20 latach płacenia składki dożywotnią wypłatę renty w wysokości 1000 zł. Składki oraz renty są płacone na początku roku. Osoby umierające przed uzyskaniem pierwszej renty otrzymują zwrot nie więcej niż pięciu wpłaconych składek (bez oprocentowania, na koniec roku śmierci). Rentobiorcom przysługuje 10-letni okres gwarantowanych wypłat.

Wyznacz (podaj najbliższą wartość) roczną składkę P w tym ubezpieczeniu. Dane są:

$\ddot{a}_{\overline{5}\rvert} = 4{,}17$	$\ddot{a}_{\overline{10}\rvert} = 6{,}759$	$\ddot{a}_{\overline{20}\rvert} = 9{,}365$
$D_x = 33\,986$	$D_{x+20} = 4\,352$	$D_{x+30} = 1\,319$
$M_x = 2\,573$	$M_{x+20} = 1\,020$	$M_{x+30} = 471$
$N_x = 345\,541$	$N_{x+20} = 36\,653$	$N_{x+30} = 9\,330$
$R_x = 47\,665$	$R_{x+5} = 35\,632$	$R_{x+10} = 25\,676$

(A) 130 (B) 160 (C) 190 (D) 220
(E) 250

6. W populacji z wykładniczym rozkładem trwania życia, $\mu = 0{,}04$, rozważamy ciągłe ubezpieczenie na życie i dożycie zawarte na okres 20 lat ze składką płatną ze stałą intensywnością przez cały okres ubezpieczenia.
Po 10 latach ubezpieczony poprosił o zmianę warunków ubezpieczenia: obniżenie składki netto do ¾ dotychczasowego poziomu, utrzymanie dotychczasowej sumy ubezpieczenia oraz odpowiednie dostosowanie okresu ubezpieczenia. Dla $\delta = 0{,}06$ podaj, o ile lat skróci się (-), wydłuży się (+) oryginalny okres ubezpieczenia. Wskaż najbliższą wartość.

(A) -4 (B) $-2\frac{2}{3}$ (C) $-1\frac{1}{3}$ (D) $1\frac{1}{3}$

(E) $2\frac{2}{3}$

7. W n-letnim ubezpieczeniu dla (x) na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 1000 składka brutto P=27,61 jest płacona na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Świadczenie śmiertelne jest płatne na koniec roku śmierci. Ubezpieczyciel ponosi przy inkasie składki koszty administracyjne w wysokości $\beta\%$ składki brutto. Przy wystawianiu polisy ponosi koszt akwizycji α % sumy ubezpieczenia. Koszty akwizycji są takie, że zillmeryzacja rezerwy daje zerową wartość po pierwszym roku (zero jest wartością wyliczoną). Całkowite narzuty na koszty w hipotetycznej jednorazowej składce brutto są równe 3,4% sumy ubezpieczenia. Przyjmując, że α oraz β są wyrażone w punktach procentowych, podaj iloczyn $\alpha \cdot \beta$ (wskaż najbliższą wartość). Dane są:

$i = 10\%$ $\quad A_{x:\overline{n|}} = 0{,}20687$ $\quad p_x = 0{,}993$

(A) 8,7 (B) 9,7 (C) 10,7 (D) 11,7
(E) 12,7

8. Na życie (50) wystawiana jest 1 stycznia roczna polisa wypłacająca świadczenie śmiertelne na koniec roku. Ubezpieczony należy do populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 80. Wiadomo, że ubezpieczony będzie 1 października uczestniczył wraz z małą grupą osób w krótkotrwałej imprezie (ekstremalny sport), którą przeżywa 80% uczestników. Dla $v = 0{,}95$ wyznacz składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli świadczenie za śmierć w imprezie wynosi 50 000 oraz 100 000 za śmierć w pozostałych przypadkach. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 11 870 (B) 11 970 (C) 12 070 (D) 12 170
(E) 12 270

9. Rozpatrujemy rentę wdowią dla pary (x) i (y). Renta wypłaca w następujący sposób:

1) gdy (x) umrze jako pierwszy, (y) zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 2 na rok,
2) gdy (y) umrze jako pierwsza, (x) zaczyna otrzymywać rentę dożywotnią ciągłą z intensywnością 1 na rok.

Składki za to ubezpieczenie są płacone w postaci renty ciągłej aż do pierwszej śmierci z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\overline{P}$. Podaj rezerwę ${}_{10}\overline{V}$, obliczoną na jedną wystawioną polisę.

Dane są:

$$\bar{a}_x = 13\,, \qquad \bar{a}_y = 17\,, \qquad \bar{a}_{x:y} = 9\,,$$

$$\bar{a}_{x+10} = 10{,}5\,, \quad \bar{a}_{y+10} = 15\,, \quad \bar{a}_{x+10:y+10} = 6$$

$${}_{10}p_x = 0{,}85\,, \quad {}_{10}p_y = 0{,}97\,.$$

Wskaż najbliższą odpowiedź.

(A) 11,6 (B) 12,2 (C) 12,8 (D) 13,4
(E) 14,0

10. Plan emerytalny dopuszcza przejście na emeryturę w wieku między 55 a 65 lat. Rozpatrujemy kohortę uczestników w wieku 50 lat. Prawdopodobieństwo utrzymania aktywnego statusu opisuje ${}_t p_{50}^{(\tau)} = \frac{60-t}{60}$ dla $0 \le t < 15$, a intensywność przejścia na emeryturę $\mu_{50+t}^{(r)} = \frac{1}{80-t}$ dla $5 \le t < 15$. Osoby, które osiągną wiek 65 lat w stanie aktywnym, przechodzą natychmiast na emeryturę. Roczna kwota emerytury jest równa 2% sumy wynagrodzeń z całego okresu zatrudnienia. Tegoroczna płaca 50-letniego uczestnika wynosi 40 000. Wyznacz tegoroczną składkę emerytalną dla 50-letniego uczestnika. Przyjmij, że całe roczne wynagrodzenie jest wypłacane na początku roku oraz że emerytura jest płatna z roczną częstotliwością. Dane są:

$$\delta = 0{,}04 \qquad \ddot{a}_{50+t} = 16 - \frac{t}{5} \quad \text{dla } 5 \le t \le 15.$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 5190 (B) 5400 (C) 5610 (D) 5820
(E) 6030

XXV Egzamin dla Aktuariuszy z 13 kwietnia 2002 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi[*]

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja[♦]
1	C	
2	C	
3	A	
4	E	
5	A	
6	E	
7	D	
8	E	
9	B	
10	A	

[*] Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

[♦] Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.