1. Który z poniższych wzorów na $E(T(x)^2)$,(x-całkowity wiek) jest prawdziwy przy założeniu o stałym natężeniu wymierania między wiekami całkowitymi ($\mu_{x+k+1/2}$ oznacza poziom natężenia wymierania w przedziale wiekowym ($x+k$, $x+k$+1))?

(A) $$E(T^2) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu_{x+k+1/2}} - \frac{{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu^2_{x+k+1/2}} + \frac{{}_{k+1} p_x}{\mu_{x+k+1/2}}\right),$$

(B) $$E(T^2) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu_{x+k+1/2}} + \frac{{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu^2_{x+k+1/2}} - \frac{{}_{k+1} p_x}{\mu_{x+k+1/2}}\right) \quad ,$$

(C) $$E(T^2) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+1)\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu_{x+k+1/2}} - \frac{{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu^2_{x+k+1/2}} + \frac{{}_{k+1} p_x}{\mu_{x+k+1/2}}\right),$$

(D) $$E(T^2) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+1)\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu_{x+k+1/2}} + \frac{{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu^2_{x+k+1/2}} - \frac{{}_{k+1} p_x}{\mu_{x+k+1/2}}\right),$$

(E) $$E(T^2) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+1)\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu_{x+k+1/2}} - \frac{{}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\mu^2_{x+k+1/2}} - \frac{{}_{k+1} p_x}{\mu_{x+k+1/2}}\right)$$

2. Dane są:

$$A_x = 0.4307 \qquad (IA)_x = 6.4514 \qquad i = 5\%$$

$$A_{x+20} = 0.6839 \qquad (IA)_{x+20} = 4.8720 \qquad {}_{20}p_x = 0.4719$$

Wyznacz $(I\ddot{a})_{x:\overline{20|}}$ (podaj najbliższą wartość).

(A) 69 (B) 73 (C) 77 (D) 81

(E) 85

3. Osoba z populacji o wykładniczym rozkładzie długości życia , $\mu = 0.05$, zakupuje za składkę netto w wysokości 100 000 dożywotnie ubezpieczenie rentowe, gwarantujące kontynuację wypłaty świadczeń – bez względu na status ubezpieczonego – co najmniej do momentu, w którym suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnie 100 000. Wskaż długość gwarantowanego okresu wypłat, jeśli świadczenie rentowe jest wypłacane ze stałą intensywnością w formie renty ciągłej oraz $\delta = 0.05$.

(A) między 10 a 11 lat

(B) między 11 a 12 lat

C) między 12 a 13 lat

(D) między 13 a 14 lat

(E) między 14 a 15 lat

4. Załóżmy, że obniżce technicznej intensywności oprocentowania o $\Delta\delta$ towarzyszy taki sam wzrost natężenia wymierania w każdej kategorii wieku. Symbole nieprimowane niech oznaczają w dalszym ciągu wielkości "przed", a primowane "po" zmianie (np. $\delta' = \delta - \Delta\delta$, $\mu'_x = \mu_x + \Delta\delta$).

Dane są:

$$\overline{A}_x = 0{,}2 \quad , \qquad \frac{\Delta\delta}{\delta} = 0{,}05 .$$

Oblicz $\overline{A'_x}$.

(A) 0.20 (B) 0.21 (C) 0.22 (D) 0.23
(E) 0.24

5. Rozważmy bezterminowe, ciągłe ubezpieczenie na życie dla (30) z sumą ubezpieczenia 1, opłacane za pomocą jednorazowej składki netto. Dane są:

$\delta = 0{,}01$, $\mu_{30+t} = \dfrac{1}{70-t}$ dla $t < 70$.

Oblicz całkę:

$$\int_0^{70} e^{-2\delta t}(1-V(t))^2 \, {}_t p_{30} \mu_{30+t} dt$$

gdzie $V(t)$ oznacza rezerwę składek netto po t latach. Podaj najbliższą wartość.

(A) 0.01 (B) 0.02 (C) 0.03 (D) 0.04
(E) 0.05

6. Rozważmy dwa produkty ubezpieczeniowe ciągłe dla (65):

(1) ta polisa jest zwyczajną rentą, kupioną za jednorazową składkę netto i wypłacającą z intensywnością 1 na rok aż do śmierci.

(2) ta polisa kupiona jest za taką samą składkę jednorazową netto; wypłaca rentę z intensywnością 0.9 na rok aż do śmierci, ale oprócz tego wypłaca uprawnionym jednorazowe świadczenie w wysokości $b(t)$, w chwili śmierci ubezpieczonego, jeśli nastąpi w wieku $65+t$.

Wiadomo ponadto, że rezerwy składek netto są identyczne dla obu produktów, dla każdego $t \geq 0$.

Dane są: $\delta = 0{,}05$, $\mu_{65+t} = \dfrac{1}{35-t}$. Oblicz $b(15)$.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. W 25-letnim ubezpieczeniu na życie i dożycie dla (40), z sumą ubezpieczenia 100 000 zł, świadczenie śmiertelne jest płatne na koniec roku śmierci. Roczna składka 3 370 zł, płatna na początku roku przez cały okres ubezpieczenia, ma następującą strukturę:

składka netto	76.55%
narzuty na koszty początkowe	5.45%
narzuty na koszty inkasa składki	10.00%
narzuty na koszty administracyjne	8.00%

Po 15 latach, na wniosek ubezpieczonego, zmieniono ubezpieczenie na bezskładkowe z terminem o 5 lat krótszym. Po zmianie warunków ubezpieczenia roczne koszty administracyjne, ponoszone na początku roku, nie ulegają zmianie. Podaj nową sumę ubezpieczenia (wskaż najbliższą wartość). Dane są:

$A_{55:\overline{5|}} = 0.79073$ $A_{55:\overline{10|}} = 0.64432$ $i = 5\%$

(A) 46 420 (B) 50 150 (C) 53 880 (D) 57 610

(E) 59 340

8. Rozważmy ubezpieczenie ciągłe dla (*x*) wypłacające $c_j(t)$, jeśli jako pierwsza zajdzie szkoda nr *j* (*j*=1,2).
Wiadomo, że wartość oczekiwana świadczenia, obliczona w chwili wypłaty (tzn. w chwili zajścia pierwszej szkody), nie zależy od *t* , i stale wynosi 1.
Dane są: *V*(10)=0,4 , $\mu_{x+10} = 0{,}03$.
Oblicz $\pi^r(10)$.

(A) 0.012 (B) 0.015 (C) 0.018 (D) 0.021
(E) 0.024

9. Renta dożywotnia dla pary małżeńskiej (x), (y) wypłaca 1000 zł rocznie na początku roku, gdy żyją obydwoje, 600 zł gdy jedno z nich. Renta ma 10-letni okres gwarantowanych wypłat: w okresie gwarancji , gdy obydwoje nie żyją, wypłaca 500 zł.

Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie (wskaż najbliższą warość).
Dane są:

$\ddot{a}_x = 9.3150$ $\quad \ddot{a}_{x:\overline{10|}} = 6.8628$ $\quad i = 5\%$

$\ddot{a}_y = 12.7304$ $\quad \ddot{a}_{y:\overline{10|}} = 7.7268$

$\ddot{a}_{x:y} = 8.3654$ $\quad \ddot{a}_{x:y:\overline{10|}} = 6.5736$

(A) 11 000 (B) 11 300 (C) 11 600 (D) 11 900
(E) 12 200

10. Rozpatrujemy uprawnienia inwalidzkie kohorty 40-letnich uczestników planu emerytalnego, wszyscy urodzeni 1 stycznia, wszyscy z 10-letnim stażem uczestnictwa, wszyscy są aktywni, czyli nikt nie jest inwalidą.

Formuła rocznego wymiaru świadczenia inwalidzkiego :

$$R_{30+t} = 0.03 \cdot [t] \cdot (AS)_{30+t} \qquad 10 \le t \le 30$$

gdzie $[t]$ jest częścią całkowitą t oraz $(AS)_x$ jest rocznym wynagrodzeniem osoby w wieku x lat. Płace zmieniają się raz w roku, na początku roku. Tuż po podwyżce $(AS)_{40} = 20\,000$.

Wartość jednostkowej renty inwalidzkiej na moment przejścia na rentę opisuje funkcja

$$\bar{a}^{(i)}_{30+t} = 25 - \frac{t}{2} \,, \qquad 10 \le t \le 30 \,.$$

W kohorcie 40-latków roczne ubytki inwalidzkie stanowią 1/3 całkowitych ubytków z planu, czyli

$$3 \cdot q^{(i)}_{40} = q^{(\tau)}_{40} = 0.006 \,.$$

Aktualna wartość świadczeń inwalidzkich aktywnego uczestnika $apv(INV)_{40} = 2500$, po sprowadzeniu na środek roku wartości świadczeń tych, którzy w danym roku przechodzą na rentę inwalidzką. Wyznacz w analogiczny sposób $apv(INV)_{41}$ przy $i = 5\%$.

(A) 2 388 (B) 2 391 (C) 2 394
(D) 2 397 (E) 2 400

XX Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2001 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....KLUCZ ODPOWIEDZI............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	C	
4	E	
5	B	
6	A	
7	C	
8	C	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.