1. Następująca funkcja intensywności zgonów

$$\mu_x^{(c)} = \mu_x + c$$

opisuje rodzinę rozkładów trwania życia. Oblicz (podaj najbliższą wartość)

$$\left. \frac{d\, \overset{\circ}{e}{}_0^{(c)}}{d\,c} \right|_{c=0},$$

jeśli dane są :

$$\overset{\circ}{e}{}_0^{(0)} = 70 \,, \qquad Var\left(X^{(0)}\right) = 400 \,.$$

Wyjaśnienie: jeśli f jest dowolnym symbolem demograficznym, to $f^{(c)}$ oznacza jego wartość dla populacji z parametrem c.

(A) -2250 (B) -2350 (C) -2450 (D) -2550
(E) -2650

2. Oblicz ${}_{3|}A_x$ mając dane:

$$A_x = \alpha_0 \quad \text{oraz} \quad (IA)^1_{x:\overline{k|}} = \alpha_k \quad \text{dla } k = 1, 2, 3$$

(A) $\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3$

(B) $\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{24}\alpha_3$

(C) $\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3$

(D) $\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 - \frac{1}{24}\alpha_3$

(E) za mało danych

3. W pewnej populacji długość życia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu_x = \mu$.

Niech Z oznacza wartość obecną świadczenia z polisy wypłacającej 1 zł w chwili śmierci. Oblicz poziom intensywności technicznego oprocentowania $\delta > 0$, dla którego wariancja Z ma wartość maksymalną. Podaj najbliższą wartość.

(A) 1.2μ (B) 1.4μ (C) 1.6μ

(D) 1.8μ (E) 2.0μ

4. Znajdź wariancję wartości obecnej świadczenia w 10-letnim ubezpieczeniu na życie (x) z sumą ubezpieczenia 1 płatną na koniec roku śmierci, wiedząc że wariancja w analogicznym ubezpieczeniu na życie i dożycie wynosi W.
Ponadto dane są:

$$v = 0.95 \ , \qquad {}_{10}p_x = 0.9 \ , \qquad \ddot{a}_{x:\overline{10}|} = \alpha \ .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) $W - 0.0323$

(B) $W + 0.4647 - 0.0539\alpha$

(C) $W + 0.0323 - 0.0762\alpha$

(D) $W - 0.4647 - 0.0539\alpha$

(E) $W - 0.0323 - 0.0539\alpha$

5. W danej populacji śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z granicznym wiekiem $\omega = 3n$. Rozważmy ubezpieczenie rentowe n-latka, który zanim osiągnie wiek $2n$ będzie płacił składkę P na początku każdego roku ubezpieczenia. W zamian za składki, począwszy od wieku $2n$ będzie otrzymywał dożywotnio w każdą rocznicę ubezpieczenia rentę w wysokości 1 zł. Składka roczna P jest skalkulowana na poziomie netto. Oblicz P, jeśli dane są:

$$\frac{1}{n} \cdot a_{\overline{n|}} = 0.54486 \qquad\qquad v^n = 0.26444$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4
(E) 0.5

6. Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie (x), w którym suma ubezpieczenia, płatna w momencie śmierci, wynosi $c(t)$, o ile śmierć nastąpiła w momencie t, $t \geq 0$. Składki są płacone w sposób ciągły przez całe życie z roczną intensywnością $P(t)$ w momencie t.

   Wiemy, że dla $0 \leq t \leq 3$:

   $P(t) = at + b$ dla pewnych rzeczywistych a, b,

   rezerwa $V(t) = t^2$,

   $c(1) = A$, $c(2) = B$.

   Znajdź $P\left(\frac{3}{2}\right)$, wiedząc że intensywność umieralności dla (x) oraz intensywność oprocentowania są stałe i wynoszą odpowiednio $\mu = 0.03$ oraz $\delta = 0.05$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 3.2 + 0.025 (A+B)

(B) 2.80 + 0.015 (A+B)

(C) 2.82 + 0.015 (A+B)

(D) 3.2 + 0.015A + 0.025B

(E) za mało danych

7.. Na życie (x) zawarte zostało bezterminowe ubezpieczenie na życie z sumą ubezpieczenia B płatną na koniec roku śmierci. Przy zawieraniu ubezpieczenia wyznaczono roczną składkę netto w wysokości 80 zł, płatną dożywotnio, na początku każdego roku ubezpieczenia. Po k latach ubezpieczenia rezerwa netto osiągnęła 1350 zł, a ubezpieczony przerwał płacenie składek i uzyskał bezskładkową polisę na 5500 zł.

Wyznacz początkową sumę ubezpieczenia B, jeśli $v = 0.95$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 10420 (B) 10820 (C) 11220 (D) 11620

(E) 12020

8. Osoba w wieku 40 lat zawarła 30-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 1000 zł, płatną w przypadku śmierci na koniec roku śmierci. Składka za to ubezpieczenie jest płacona przez 20 lat, na początku roku, w stałej kwocie *P*. W składce *P* zawarty jest narzut na koszty ubezpieczyciela, ponoszone w stałej kwocie 70 zł na początku każdego roku, przez cały okres ważności ubezpieczenia. Wyznacz rezerwę brutto po 10 latach trwania ubezpieczenia, jeśli dane są:

$\ddot{a}_{40:\overline{30|}} = 14.480$ $\ddot{a}_{50:\overline{20|}} = 11.435$

$\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 12.325$ $\ddot{a}_{50:\overline{10|}} = 7.625$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 264 (B) 294 (C) 324 (D) 354

(E) 384

9. Rozważmy trzy ubezpieczenia rentowe:

1) pierwsze jest dożywotnią rentą ciągłą dla żony, obecnie w wieku *y*, wypłacającą świadczenie z intensywnością roczną 1 zł począwszy od śmierci męża,
2) drugie jest analogiczną rentą wdowią dla męża, obecnie w wieku *x*,
3) trzecie jest analogiczną rentą dla owdowiałej osoby, wypłacającą niezależnie od tego, kto umrze wcześniej.

Każde z ubezpieczeń kupowane jest za składkę netto, płatną w formie renty ciągłej ze stałą roczną intensywnością składki $\overline{P}_j$ (j = 1, 2, 3 odpowiednio dla każdej z rent). Płatność składek przerywa pierwsza śmierć.

Oblicz $\overline{P}_3$, jeśli wiadomo, że

$$\bar{a}_x = 16.2 \qquad \bar{a}_y = 18.3 \qquad \overline{P}_1 = \frac{3}{2}\overline{P}_2$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 0.800 (B) 0.825 (C) 0.850 (D) 0.875

(E) 0.900

10. Fundusz emerytalny przypadający na aktywnych uczestników odnotował w momencie $t = t_0$ niedobór środków w wysokości

$$(aU)(t_0) = (aV)(t_0) - (aF)(t_0) > 0 \quad .$$

Postanowiono w okresie 3 lat zlikwidować niedobór, tj. dla $t_0 \le t \le t_0 + 3$ podnieść intensywność składki płaconej w momencie *t* do poziomu (przeliczonego na rok)

$$(aC)(t) = P(t) + \lambda(t) \cdot (aU)(t) \quad ,$$

gdzie $P(t)$ jest normalną roczną intensywnością składki (*normal cost rate*),
$\lambda(t)$ jest funkcją amortyzującą niedobór.

Cel ten można osiągnąć na moment $t_0 + 3$ przyjmując w okresie $t_0 \le t \le t_0 + 3$:

i. $\lambda(t) = \delta$ (intensywność technicznego oprocentowania),

ii. $\lambda(t) = \dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{3}|}}$,

iii. $\lambda(t) = \dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{t_0+3-t}|}}$.

Poprawna jest odpowiedź:

(A) tylko i (B) tylko ii (C) tylko iii (D) wszystkie
(E) żadna

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 października 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....KLUCZ ODPOWIEDZI................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	C	
4	B	
5	A	
6	B	
7	A	
8	E	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.