

Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, \dots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\frac{1}{\theta}$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \beta^3 \theta^2 \exp(-\beta\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest znane. Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru $\frac{1}{\theta}$ postaci $[a, b]$, taki że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0,05,$$

gdzie $\Pi(\cdot \mid x)$ oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$. Tak otrzymany przedział jest równy

$$(A) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{12,59}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{1,64} \right]$$

$$(B) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{7,81}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{0,35} \right]$$

$$(C) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{16,92}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{3,33} \right]$$

$$(D) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{21,03}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{5,23} \right]$$

$$(E) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{28,87}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{9,39} \right]$$

Zadanie 2

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o funkcji gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy dwa estymatory funkcji $g(\theta) = P_{\theta}(X_1 > 1) = e^{-\theta}$:

- $T_{1,n}$ - estymator największej wiarygodności w oparciu o próbę $X_1, X_2, \dots, X_n$
- $T_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i > 1)$, gdzie funkcja $\mathbf{1}(x > 1) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$.

Niech V_i oznacza wariancję asymptotyczną estymatora $T_{i,n}$, $i = 1, 2$.

Wtedy stosunek $\frac{V_1}{V_2}$ jest równy

(A) $\frac{1}{\theta^2(e^{\theta} - 1)}$

(B) $\frac{\theta^2 e^{-\theta}}{e^{\theta} - 1}$

(C) $\frac{\theta^2}{e^{\theta} - 1}$

(D) $\frac{\theta}{e^{\theta} - 1}$

(E) $\frac{1}{\theta^2 e^{\theta}}$

Zadanie 3

Niech $N, Y_1, Y_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym $\Theta = \theta$. Zmienne $Y_i, i = 1, 2, \dots$, mają warunkowe rozkłady dwupunktowe $P(Y_i = 1 | \theta) = \theta = 1 - P(Y_i = 0 | \theta)$. Warunkowy rozkład zmiennej losowej N przy danym $\Theta = \theta$ jest rozkładem ujemnym dwumianowym o funkcji prawdopodobieństwa $P(N = n | \theta) = (n+1)\theta^2(1-\theta)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Rozkład brzegowy zmiennej Θ jest rozkładem beta o gęstości

$$f(\theta) = \begin{cases} 12\theta^2(1-\theta) & \text{gdy } \theta \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Niech $X_i, i = 1, 2, \dots$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1, niezależnymi od zmiennych $N, Y_1, Y_2, \dots$.

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{ i } \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Oblicz współczynnik kowariancji $\text{Cov}(S, T)$.

- (A) 2,8
- (B) 3,6
- (C) 1,6
- (D) 0,8
- (E) 4,4

Zadanie 4

Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } 0 < y < x < +\infty \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Niech $U = Y - X$ i $V = 2Y + X$.

Wtedy $E(V | U = -2)$ jest równa

(A) 5

(B) 1

(C) 3

(D) 4

(E) 2

Zadanie 5

Niech $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}.$$

Wtedy

$$E(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \mid \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = t),$$

gdzie t jest ustaloną liczbą dodatnią, jest równa

- (A) $\frac{n+2t-1}{2}$
- (B) $(2n-1)t+n-1$
- (C) $nt+n-1$
- (D) $(2n-1)t+n^2-1$
- (E) $\frac{(n+1)t+n-1}{2}$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \dots, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_1, \sigma^2)$, a $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_2, \sigma^2)$. Wszystkie zmienne są niezależne, a parametry m_1, m_2, σ są nieznane. Testujemy hipotezę $H : m_1 = m_2$ przy alternatywie $K : m_1 \neq m_2$. Hipotezę H odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S} > c,$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Y_i$ i $S^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (X_i - Y_i)^2$.

Wyznacz c tak, aby rozmiar testu był równy 0,05.

- A) 0,754
- (B) 0,399
- (C) 0,787
- (D) 0,632
- (E) 0,547

Zadanie 7

Rzucono niezależnie 16 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskano mniej niż 6 serii, jeśli wiadomo, że uzyskano 10 orłów i 6 reszek.

(A) $\frac{48}{1001}$

(B) $\frac{47}{1001}$

(C) $\frac{44}{1001}$

(D) $\frac{46}{1001}$

(E) $\frac{45}{1001}$

Uwaga. Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbbaabbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu *a* i 2 serie elementów typu *b*).

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale (a, b) , gdzie a, b są nieznane i $a < b$.

Rozważamy rozstęp równy

$$T = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

jako estymator długości przedziału $b - a$. Błąd średniokwadratowy tego estymatora, czyli $E_{a,b}(T - b + a)^2$, jest równy

(A) $\frac{2n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(B) $\frac{4(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

(C) $\frac{2(3n+4)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(D) $\frac{2(2n+1)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(E) $\frac{6(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

Zadanie 9

Niech $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(bx_i, 1)$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są znanymi liczbami, a b jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 9$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,01 weryfikujemy hipotezę $H_0 : b = 1$ przy alternatywie $H_1 : b > 1$. Wtedy prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju przy alternatywie $b = 2$ jest równe

- (A) 0,16
- (B) 0,35
- (C) 0,25
- (D) 0,01
- (E) 0,09

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i , tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że $a \leq k$).

Niech $S = \sum_{i=1}^n Z_i$.

Oblicz estymator *największej wiarygodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

(A) $\hat{\lambda} = \ln\left(\frac{S}{n} - 1\right)$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{n}{S}$

(C) $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{S}{n}$

(E) $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 września 2013 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :K L U C Z O D P O W I E D Z I.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	C	
3	B	
4	A	
5	B	
6	D	
7	B	
8	E	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.