

Zadanie 1

Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ są niezależne i mają rozkłady normalne $X_i \sim N(m\sqrt{i}, i)$, $i = 1, 2, \dots, 16$, zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : m = 0$ przy alternatywie $H_1 : m > 0$ na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości okazało się, że wektor $(X_1, X_2, \dots, X_{16})$ ma rozkład normalny taki, że $EX_i = m\sqrt{i}$, $VarX_i = i$, $i = 1, 2, \dots, 16$, oraz współczynnik korelacji

$$\rho(X_i, X_j) = \begin{cases} 0,5 & \text{gdy } |i - j| = 1 \\ 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{w pp} \end{cases}.$$

Wyznaczyć rzeczywisty rozmiar testu.

- (A) 0,09
- (B) 0,12
- (C) 0,21
- (D) 0,17
- (E) 0,02

Zadanie 2

Założmy, że $X_1, \dots, X_n, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{2}$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dla $n = 1, 2, \dots$

Niech Y będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1, \dots, X_n, \dots$, o rozkładzie gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} 32x^2 \exp(-4x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}.$$

Niech

$$N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}.$$

Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej N .

$$(A) \quad P(N = n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \left(\frac{8}{27}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(B) \quad P(N = n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \left(\frac{1}{27}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(C) \quad P(N = 0) = \frac{8}{27}, \quad P(N = n) = \frac{19}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

$$(D) \quad P(N = n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(E) \quad P(N = n) = \exp(-2) \frac{2^n}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zadanie 3

Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x|) & \text{gdy } x \in [-\theta, \theta] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-\theta, \theta], \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta = 1$ przy alternatywie $H_1: \theta \neq 1$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0,20. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 4$ jest równa

- (A) 0,80
- (B) 0,74
- (C) 0,65
- (D) 0,40
- (E) 0,37

Zadanie 4

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1.

Niech $U = -\ln\left(\frac{X}{Y}\right)$. Wtedy

(A) zmienne U i Y są niezależne

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej U wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} \text{ dla } u \in \mathbb{R}$$

(C) $P(U > 0) = \frac{1}{3}$

(D) $E(Y | U = 1) = \frac{e}{1+e}$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej U wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{2e^u}{(1+e^u)^2} \text{ dla } u > 0$$

Zadanie 5

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$, a zmienna losowa N ma rozkład postaci

$$P(N = n) = e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ i N są niezależne.

Niech $M_N = \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ i $z \in (0,1)$. Wtedy $E(M_N | X_1 = z)$ jest równa

(A) $\frac{1 - 2z + (2z + 1)e^{2(z-1)}}{2}$

(B) $1 - \frac{1 - e^{z-1}}{e^2}$

(C) $1 - \frac{1 - e^{2(z-1)}}{e^2}$

(D) $\frac{e^{2(z-1)}}{2}$

(E) $1 - \frac{1 - e^{2(z-1)}}{2}$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ mają rozkład o wartości oczekiwanej 2 i wariancji 1. Zmienne $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N=n) = \frac{\Gamma(2+n)}{n!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n=0,1,2,\dots$.

$$\text{Niech } S_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N=0 \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N>0 \end{cases} \quad \text{i} \quad Z_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N=0 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i & \text{gdy } N>0 \end{cases}.$$

Wtedy współczynnik kowariancji $\text{Cov}(S_N, Z_N)$ jest równy

(A) $\frac{19}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{16}{9}$

(D) $\frac{19}{9}$

(E) $\frac{17}{18}$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ są warunkowo niezależne przy danym θ . Załóżmy, że rozkład a priori parametru θ jest rozkładem gamma o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{6} \beta^4 \theta^3 \exp(-\beta \theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases}.$$

Na podstawie próby losowej $X_1, X_2, \dots, X_n$ wyznaczamy predyktor bayesowski $\hat{X}_{n+1}$ zmiennej X_{n+1} przy kwadratowej funkcji straty.

Wariancja otrzymanego predyktora jest równa

(A) $\frac{\beta^2 n}{18(n+3)}$

(B) $\frac{\beta^2 n}{6(n+3)^2}$

(C) $\frac{\beta^2 n^2}{18(n+3)^2}$

(D) $\frac{\beta^2 n}{12(n+4)^2}$

(E) $\frac{\beta^2 n}{48(n+4)}$

Zadanie 8

Niech $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, X_2, \dots, X_n$, ale dodatkowo znamy średnią $\bar{X}_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$.

Budujemy estymator parametru σ^2 postaci $S^2 = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{2n})^2$,

gdzie stała a dobrana jest tak, by statystyka $S^2 = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{2n})^2$ była nieobciążonym

estymatorem wariancji σ^2 .

Interesuje nas względny błąd estymacji

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Wartość oczekiwana $E(R^2)$ jest równa

(A) $\frac{2(2n-1)}{n^2}$

(B) $\frac{2(4n-3)}{n^2}$

(C) $\frac{2}{2n-1}$

(D) $\frac{2(4n-3)}{(2n-1)^2}$

(E) $\frac{4n-3}{2(2n-1)^2}$

Zadanie 9

Niech $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ma rozkład logarymiczno-normalny $LN(bx_i, 1)$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n$ są znanymi liczbami, a b jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 4$.

Niech $\hat{b}$ będzie estymatorem największej wiarygodności parametru b , a $\hat{g} = \exp(2\hat{b})$ estymatorem funkcji $g(b) = \exp(2b)$.

Wtedy obciążenie estymatora $\hat{g}$

$$E_b \hat{g} - g(b)$$

jest równe

- (A) 0
- (B) $e^{2b}(\sqrt{e} - 1)$
- (C) $e^{2b}(e^2 - 1)$
- (D) $e^{2b}(e^4 - 1)$
- (E) $e^{2b}(e - 1)$

Zadanie 10

Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły „jedyńki”. W trzeciej rundzie rzucamy tymi kostkami, na których do tej pory nie wypadły „jedyńki”.

Oblicz prawdopodobieństwo, że po co najwyżej trzech rundach na wszystkich kostkach będą „jedyńki” (wybierz najbliższą wartość).

- (A) 0,021
- (B) 0,050
- (C) 0,026
- (D) 0,017
- (E) 0,075

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :K L U C Z O D P O W R I E D Z I.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	B	
5	E	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.