

Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, \dots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_1)$, a $Y_1, Y_2, \dots, Y_6$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_2)$, gdzie θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1: \theta_1 = 2\theta_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\max\{X_1, X_2, \dots, X_6\}}{\max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_6\}} > c \right\},$$

gdzie c jest stałą dobraną tak, by test miał rozmiar 0,1.

Moc tego testu jest równa

- (A) 0,972
- (B) 0,961
- (C) 0,998
- (D) 0,950
- (E) 0,765

Zadanie 2

Niech zmienna losowa S_n będzie liczbą sukcesów w n ($n > 1$) próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p . O zdarzeniu losowym A wiemy, że

$$\Pr(A | S_n = k) = a \frac{k}{n} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie a jest znaną liczbą, $0 < a \leq 1$. Oblicz $E(S_n | A)$.

(A) $pn+1-p$

(B) $ap(n+1)$

(C) $p(n-1)$

(D) $pn+1$

(E) $apn+1$

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej μ i nieznanej wariancji σ^2 . Niech T oznacza estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru μ^2 . Wtedy błąd średniokwadratowy tego estymatora, czyli

$$E_{\mu, \sigma}(T - \mu^2)^2$$

jest równy

(A) $\frac{2\sigma^4}{n(n-1)}$

(B) $\frac{2\sigma^4(2n-1)}{n^2(n-1)} + \frac{4\mu^2\sigma^2}{n}$

(C) $\frac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \frac{4\mu^2\sigma^2}{n^2}$

(D) $\frac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \frac{2\mu^2\sigma^2}{n}$

(E) $\frac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \frac{4\mu^2\sigma^2}{n}$

Zadanie 4

Rozważamy sumę losowej liczby zmiennych losowych:

$$S = S_N = \sum_{i=1}^N X_i, \text{ gdy } N \geq 1, \text{ i } S = S_N = 0, \text{ gdy } N < 1,$$

gdzie składniki X_i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, są niezależne od siebie nawzajem i od zmiennej losowej N . Niech

$$E(X_i) = 10, \quad \text{Var}(X_i) = 4$$

i zmienna losowa N ma rozkład o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(N = k) = 0,5^{k+1} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Współczynniki a_*, b_* funkcji liniowej $a_*S + b_*$, która najlepiej przybliża zmienną losową N w sensie średniokwadratowym, to znaczy spełnia

$$E\{(a_*S + b_* - N)^2\} = \min_{a,b} E\{(aS + b - N)^2\},$$

są równe

(A) $a_* = \frac{5}{52}, \quad b_* = \frac{50}{51}$

(B) $a_* = \frac{5}{51}, \quad b_* = \frac{1}{51}$

(C) $a_* = \frac{50}{51}, \quad b_* = \frac{1}{51}$

(D) $a_* = \frac{5}{51}, \quad b_* = \frac{50}{51}$

(E) $a_* = \frac{5}{52}, \quad b_* = \frac{4}{52}$

Zadanie 5

W urnie znajduje się 100 kul ponumerowanych od 1 do 100. Losujemy bez zwracania 25 kul i zapisujemy numery, a następnie wrzucamy kule z powrotem do urny. Czynność powtarzamy 5 razy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane co najmniej 2 razy.

- (A) 66,7
- (B) 33,3
- (C) 63,3
- (D) 36,7
- (E) 26,4

Zadanie 6

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką $X_1, \dots, X_n$ z rozkładu normalnego o nieznannej średniej μ i znanej wariancji równej 2. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0: \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1: \mu = 2$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n .

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{1/n} = 1$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{e^{-n} / \sqrt{2\pi}} = 1$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{e^{-n} / \sqrt{2\pi n}} = 1$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{e^{-n} / \sqrt{8\pi n}} = 1$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{e^{-n} / \sqrt{4\pi n}} = 1$

Zadanie 7

Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Nie obserwujemy zmiennej X ale zmienną Y równą X , gdy X jest większe od 2. Nie wiemy, ile było obserwacji zmiennej X nie większych niż 2 ani jakie były ich wartości. W wyniku tego eksperymentu otrzymujemy próbkę losową $Y_1, Y_2, \dots, Y_8$. Na podstawie próbki budujemy przedział ufności dla parametru θ postaci $[c_1 T, c_2 T]$, gdzie T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ , a stałe c_1 i c_2 dobrane są tak, by

$$P_{\theta}(\theta < c_1 T) = P_{\theta}(\theta > c_2 T) = 0,05.$$

Wtedy długość przedziału ufności jest równa

- (A) $1,596T$
- (B) $2,292T$
- (C) $1,146T$
- (D) $0,798T$
- (E) $0,573T$

Zadanie 8

Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,1)$. Niech

$$Z = \frac{U^{1/2}}{U^{1/2} + V^4},$$

wtedy $E(Z | U^{1/2} + V^4 < 1)$ jest równe

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{1}{9}$

(C) $\frac{12}{17}$

(D) $\frac{5}{17}$

(E) $\frac{12}{13}$

Zadanie 9

Niech $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $EN = \lambda$ niezależną od zmiennych $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$. Niech $M_N = \min\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$. Wyznacz $\text{Cov}(M_N, N)$.

(A) $\frac{(\lambda+1)e^{-\lambda}-1}{\lambda}$

(B) $\frac{\lambda-1+e^{-\lambda}}{\lambda}$

(C) $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

(D) $\frac{\lambda e^{-\lambda}-1}{\lambda}$

(E) 1

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 4. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(N = k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots,$$

niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy $P(S_N < 5)$ jest równe

(A) $0,8 - 0,2e^{-2}$

(B) $0,8(1 - e^{-1})$

(C) $1 - 0,2e^{-1}$

(D) $1 - e^{-1}$

(E) $0,2(1 - e^{-1})$

Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	B	
5	D	
6	E	
7	C	
8	A	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.