

Zadanie 1.

Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$. Wyznacz $\frac{E(X - e \mid X > e)}{EX}$.

- (A) 0,91
- (B) 0,86
- (C) 1,82
- (D) 1,95
- (E) 0,84

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ mają rozkłady normalne $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, zaś zmienne $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ mają rozkłady normalne $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Parametry $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ są nieznane. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s} \right| > z \right\}, \text{ gdzie } s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - Y_i)^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} Y_i.$$

Jeśli rozmiar testu jest równy $\alpha = 0,05$, to z jest równe

- (A) 0,705
- (B) 0,754
- (C) 0,362
- (D) 0,602
- (E) 0,576

Zadanie 3.

Zmienne losowe X_j , gdzie $j = 1, 2, 3, \dots$ są warunkowo niezależne pod warunkiem zmiennej Θ i mają rozkłady warunkowe o wartości oczekiwanej Θ i wariancji $4\Theta^2$. Zmienna losowa N pod warunkiem zmiennej losowej $\Lambda = \lambda$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ .

Zmienne $(X_1, X_2, \dots), N$ są niezależne. Zmienna Θ ma rozkład Gamma z parametrami $(100, 2)$, a zmienna Λ ma rozkład Gamma z parametrami $(2, 4)$. Zmienne Λ i Θ są niezależne. Wariancja zmiennej losowej

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^N X_j & \text{dla } N > 0 \\ 0 & \text{dla } N = 0 \end{cases}$$

jest równa

- A) 6315,625
- (B) 5050,000
- (C) 5065,625
- (D) 6062,500
- (E) 6634,375

Uwaga: Rozkład Gamma z parametrami (α, β) ma gęstość

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Zadanie 4.

Dysponujemy dwiema urnami. W urnie I mamy dwie kule białe i jedną czarną, w urnie II mamy trzy kule białe i trzy czarne. Powtarzamy n razy eksperyment polegający na tym, że losujemy jedną kulę z urny I, nie oglądając jej wkładamy ją do urny II, następnie losujemy jedną kulę z urny II i nie oglądając jej wkładamy ją do urny I. Niech X_n oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po n doświadczeniach. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n X_{n+1})$ jest równa

(A) $\frac{9}{4}$

(B) $\frac{39}{14}$

(C) $\frac{65}{21}$

(D) $\frac{22}{7}$

(E) $\frac{7}{2}$

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \geq 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Niech $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ i

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Wtedy $\text{Cov}(\bar{X}, Z)$ jest równa

(A) $\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

(B) $\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$

(C) $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(D) $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

(E) $\frac{5}{(n+4)(n+3)(n+2)}$

Zadanie 6.

Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi spełniającymi warunki

$P(C - B) > 0$ i $P(B - C) > 0$ i $P(B \cap C) > 0$ i $P(A|C - B) > P(A|B)$. Wtedy

- (A) $P(A|B \cup C) < P(A|C)$
- (B) $P(A|B \cup C) > P(A|B)$
- (C) $P(A|B - C) > P(A|C - B)$
- (D) $P(A|B \cap C') < P(A|B)$
- (E) $P(A|B \cap C') > P(A|C)$

Zadanie 7.

Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Niestety sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości 0. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność odnotowanych realizacji wynosi n . Tak więc, każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $K_1, K_2, \dots, K_n$ wynosi co najmniej 1 i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się obserwacji o wartości 0. Estymujemy parametr λ za pomocą estymatora postaci

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{+\infty} iN_i,$$

gdzie N_i jest liczbą obserwacji o wartości i . Błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{\lambda}$ jest równy

(A) $\frac{\lambda}{n}(1 - e^{-\lambda})$

(B) $\frac{\lambda^2}{n}$

(C) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda^2 e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

(D) $\frac{\lambda^2 + \lambda - \lambda e^{-\lambda}}{n(1 - e^{-\lambda})}$

(E) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

Zadanie 8.

Założmy, że $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ są dodatnimi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech $R_0 = 0$ i

$R_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, gdy $n > 0$. Niech N i M będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona, przy czym $EN = 1$ i $EM = 2$. Wtedy $P(R_{N+M} > R_N)$ jest równe

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{2}{3}(1 + 0,5e^{-3} - 1,5e^{-1})$

(C) $\frac{2}{3}(1 - e^{-3})$

(D) $\frac{2}{3}(1 - e^{-2})$

(E) $\frac{2}{3}(1 - 2e^{-3})$

Zadanie 9.

Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_5, Y_1, Y_2, \dots, Y_5$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $X_i, i = 1, 2, \dots, 5$, mają rozkłady normalne $N(\mu_X, 1)$, a zmienne $Y_i, i = 1, 2, \dots, 5$, mają rozkłady normalne $N(\mu_Y, 2^2)$, zbudowano test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \mu_X = \mu_Y = 0$ przy alternatywie $H_1 : \mu_X = 1$ i $\mu_Y = -1$ na poziomie istotności 0,05. W rzeczywistości zmienne losowe $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, 5$, są niezależne i mają rozkłady normalne o parametrach $EX_i = \mu_X, EY_i = \mu_Y, VarX_i = 1, VarY_i = 4$, współczynnik korelacji $\rho(X_i, Y_i) = 0,5$. Przy tych warunkach moc zbudowanego testu jest równa

- (A) 0,65
- (B) 0,43
- (C) 1
- (D) 0,83
- (E) 0,87

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{2^{\theta} \theta}{(2+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. W oparciu o estymator największej wiarygodności T parametru θ zbudowano przedział ufności dla θ na poziomie ufności 0,95 postaci $[cT, dT]$, gdzie liczby c i d dobrano tak, aby

$P_{\theta}(\theta < cT) = P_{\theta}(\theta > dT) = 0,025$. Liczby c i d są równe

- (A) $c = 0,48$ i $d = 1,71$
- (B) $c = 0,76$ i $d = 1,42$
- (C) $c = 0,32$ i $d = 2,05$
- (D) $c = 0,16$ i $d = 1,03$
- (E) $c = 0,54$ i $d = 1,57$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusze odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	D	
3	E	
4	C	
5	C	
6	B	
7	E	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.