Zadanie 1

Niech $X_1,...,X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \text{ gdy } x > 0.$$

Estymujemy dodatni parametr θ wykorzystując estymator największej wiarogodności $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Wyznaczyć w przybliżeniu rozmiar próbki n taki, żeby

$$\Pr\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\theta} \le 0.01\right) \approx 0.95.$$

Posłużyć się aproksymacją rozkładem normalnym.

(A) 1000

(B) 49729

(C) 26896

(D) 40000

(E) 38416

Zadanie 2

Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych równych $EX_i = \frac{1}{i}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Wtedy prawdopodobieństwo $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})$ jest równe

(A) $\frac{2}{n}$

(B) $\frac{2}{n^2+n+2}$

(C) $\frac{2}{n^2+n-2}$

(D) $\frac{2}{n^2+n}$

(E) $\frac{2}{n^2+1}$

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases},$$

a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2\theta}{(1+x)^{2\theta+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}.$$

Wszystkie zmienne są niezależne. Parametr $\theta > 0$ jest nieznany. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_0 : \theta > 1$ za pomocą testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności 0,05. Hipotezę H_0 odrzucamy gdy spełniona jest nierówność

(A) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1+X_i) + 2\sum_{i=1}^{5} \ln(1+Y_i) > 43{,}77$

(B) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1+X_i) + 2\sum_{i=1}^{5} \ln(1+Y_i) < 18{,}31$

(C) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1+X_i) + 2\sum_{i=1}^{5} \ln(1+Y_i) < 9{,}25$

(D) $2\sum_{i=1}^{10} \ln(1+X_i) + \sum_{i=1}^{5} \ln(1+Y_i) < 7{,}26$

(E) $2\sum_{i=1}^{10} \ln(1+X_i) + \sum_{i=1}^{5} \ln(1+Y_i) > 12{,}50$

Zadanie 4

Zmienna losowa N ma rozkład geometryczny postaci

$$P(N=k)=\left(\frac{1}{4}\right)^k\frac{3}{4} \text{ dla } k=0,1,2,\ldots.$$

Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N. Każda ze zmiennych losowych X_i ma ten sam rozkład o parametrach

$$EX=1, \quad E\left(X^2\right)=2, \quad E\left(X^3\right)=3.$$

Niech

$$S_N=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} X_i & gdy \quad N>0 \\ 0 & gdy \quad N=0\end{cases}.$$

Współczynnik skośności $\dfrac{E\left(S_N-ES_N\right)^3}{\left(VarS_N\right)^{3/2}}$ jest równy

(A) 2,336

(B) 2,538

(C) -1,168

(D) 1,269

(E) -0,491

Zadanie 5

Przeprowadzamy wśród wylosowanych osób ankietę na delikatny temat. Ankietowana osoba rzuca kostką do gry, i w zależności od wyniku rzutu kostką (wyniku tego nie zna ankieter) podaje odpowiednio zakodowaną odpowiedź na pytanie:

„Czy zdarzyło się Panu/Pani w roku 2009 dać łapówkę w klasycznej formie pieniężnej, przekraczającą kwotę 100 zł?”

Przyjmijmy, iż interesująca nas cecha X przyjmuje wartości:

- $X = 1$ jeśli odpowiedź brzmi „TAK”,
- $X = 0$ jeśli odpowiedź brzmi „NIE”,

Pierwszych 200 osób udziela odpowiedzi $Z_1, \dots, Z_{200}$ zgodnie z regułą:

- Jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, 2, 3 lub 4 , to:
  $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 5 lub 6, to:
  $Z_i = 1 - X_i$

Następnych 200 osób udziela odpowiedzi $Z_{201}, \dots, Z_{400}$ zgodnie z regułą:

- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, lub 2 , to:
  $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 3, 4, 5 lub 6, to:
  $Z_i = 1 - X_i$

Dla uproszczenia zakładamy, że 400 ankietowanych osób to próba prosta z (hipotetycznej) populacji o nieskończonej liczebności, a podział na podpróby jest także całkowicie losowy. Interesujący nas parametr tej populacji to oczywiście

$$q = P(X = 1)$$

Niech

$$\overline{Z}_1 = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=1}^{200} Z_i, \qquad \overline{Z}_2 = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=201}^{400} Z_i .$$

Estymator parametru q uzyskany metodą największej wiarogodności jest równy

(A) $-\overline{Z}_1 + 2\overline{Z}_2$

(B) $2\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2$

(C) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\overline{Z}_1 + \frac{3}{2}\overline{Z}_2$

(D) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\overline{Z}_1 - \frac{3}{2}\overline{Z}_2$

(E) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\overline{Z}_1 - \frac{1}{2}\overline{Z}_2$

Zadanie 6

O zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o tej samej wartości oczekiwanej równej μ oraz tej samej wariancji równej σ^2 zakładamy, iż:

$COV\left(X_i, X_j\right) = \rho \cdot \sigma^2$ dla $i \neq j$.

Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$, i mają rozkłady prawdopodobieństwa postaci:

$P(\varepsilon_i = 1) = P\left(\varepsilon_i = \frac{1}{2}\right) = P(\varepsilon_i = 0) = \frac{1}{3}$.

Wariancja zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot X_i$ jest równa

(A) $\frac{n}{12}\left(5\sigma^2 + 2\mu^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2\right)$

(B) $\frac{n}{12}\left(2\sigma^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2\right)$

(C) $\frac{n}{12}\left(5\sigma^2 + 2\mu^2 + \frac{3}{2}(n-1)\rho\sigma^2\right)$

(D) $\frac{n}{12}\left(5\sigma^2 + 2\mu^2 + 6(n-1)\rho\sigma^2\right)$

(E) $\frac{n}{12}\left(5\sigma^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2\right)$

Zadanie 7

Mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w każdej z urn znajdują się 2 kule białe i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{7}$

(D) $\frac{4}{7}$

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} be^{-b(x-a)} & gdy \quad x \geq a \\ 0 & gdy \quad x < a \end{cases},$$

gdzie $a \in R$ i $b > 0$ są nieznanymi parametrami. Rozważamy estymator największej wiarogodności (T_a, T_b) wektora parametrów (a, b).

Wartości oczekiwane ET_a i ET_b są równe

(A) $ET_a = a - \frac{1}{nb}$ i $ET_b = b$

(B) $ET_a = a + \frac{1}{n}$ i $ET_b = \frac{n}{n-1}b$

(C) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = \frac{n}{n-1}b$

(D) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = \frac{n}{n-2}b$

(E) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = b$

Zadanie 9

Zmienne losowe X i Y są niezależne i zmienna X ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu,\sigma^2)$, gdzie $\mu = 1$ i $\sigma = 2$, a zmienna Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Niech $S = X + Y$. Wtedy $E(S \mid X > e)$ jest równa

(A) 40,17

(B) 9,22

(C) 21,63

(D) 16,44

(E) 41,26

Zadanie 10

Niech X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & gdy \quad x \geq 0 \\ 0 & gdy \quad x < 0 \end{cases},$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem. Niestety nie obserwujemy zmiennych X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ale zmienne $Y_i = [X_i]$, $i = 1,2,3,4,5$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowita liczby x (największą liczbę całkowitą $n \leq x$).
Dysponując próbką Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 weryfikujemy hipotezę $H_0 : \lambda = 1$, przy alternatywie $H_1 : \lambda = 3$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \{\hat{\lambda} > 1{,}79\},$$

gdzie $\hat{\lambda}$ oznacza estymator największej wiarogodności parametru λ otrzymany na podstawie próby losowej Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5. Rozmiar tego testu jest równy (wybierz najlepsze przybliżenie)

(A) 0,100

(B) 0,156

(C) 0,286

(D) 0,186

(E) 0,050

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...............................
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	C	
4	B	
5	D	
6	A	
7	C	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.