

Zadanie 1.

Założmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 10.

Obliczyć $v = \text{var}(X_3 + X_4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 9)$.

(A) $v = 10$

(B) $v = 20$

(C) $v = 12$

(D) $v = 13$

(E) $v = 15$

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 2.

Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

Wtedy prawdziwe jest następujące zdanie.

(A) $P(U \in (0,2) \wedge V < 0) = 1 - 2e^{-1}$

(B) $P(U \in (0,2) \wedge V > 0) = \frac{1}{2} - e^{-1}$

(C) $P(U \in (0,2) \wedge V \in (0,2)) = 1 - e^{-1}$

(D) $P(U \in (0,2) \wedge V > 0) = \frac{1}{2} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}$

(E) $P(V \in (0,2)) = 1 - e^{-1}$

Zadanie 3.

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2, \dots$ na przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ dla $i, j = 1, 2, 3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3} \right],$$

(gdzie $\pi_i = \Pr(X_1 = i)$ dla $i = 1, 2, 3$).

Oblicz $p = \Pr(X_1 = 1 \mid X_2 \neq 1 \wedge X_3 \neq 1)$.

(A) $p = \frac{1}{7}$

(B) $p = \frac{1}{8}$

(C) $p = \frac{1}{4}$

(D) $p = \frac{1}{9}$

(E) $p = \frac{1}{12}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się 16 kul, z których 8 jest białych i 8 czarnych. Losujemy bez zwracania 6 kul, a następnie z pozostałych 5 kul. Niech S_2 oznacza liczbę kul białych uzyskaną w drugim losowaniu. Oblicz $\text{Var}S_2$

(A) 1

(B) $\frac{11}{12}$

(C) $\frac{6}{12}$

(D) $\frac{7}{12}$

(E) $\frac{8}{12}$

Zadanie 5.

Zmienna losowa X ma rozkład Weibulla o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Statystyk nie obserwuje zmiennej X , uzyskuje tylko informację, gdy zmienna X przekroczy wartość 1, a mianowicie obserwuje zmienną Y równą $X - 1$, gdy zmienna X jest większa niż 1. W wyniku takiej obserwacji uzyskuje prostą próbę losową $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$. Na podstawie tych danych weryfikuje hipotezę $H_0 : \theta \leq 3$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 3$. Test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0 , gdy spełniona jest nierówność

(A) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 > 5,2351$

(B) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 > 15,2351$

(C) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 1,8085$

(D) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 11,8085$

(E) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 10,6567$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0,1) \end{cases},$$

Niech $U_n = (X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{n}}$. Wtedy

- (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq e^{-2}) = 1$
- (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P((U_n - e^{-2})\sqrt{n} < 4e^{-2}) = 0,977$
- (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P((U_n - e^2)\sqrt{n} < 4e^2) = 0,977$
- (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P((U_n - e^{-2})\sqrt{n} > 8e^{-4}) = 0,023$
- (E) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq e^{-2}) = 1$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

Niech N będzie zmienną losową, niezależną od $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, o rozkładzie ujemnym dwumianowym $P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r (1-p)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $r > 0$ i $p \in (0, 1)$ są ustalonymi parametrami. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, X_2, \dots, X_N) & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(NZ_N)$ i $\text{Var}(NZ_N)$.

- (A) $E(NZ_N) = \frac{1}{2}$ i $\text{Var}(NZ_N) = \frac{1}{4}$
- (B) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $\text{Var}(NZ_N) = \frac{1-p^r}{4}$
- (C) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $\text{Var}(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{4}$
- (D) $E(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{2p}$ i $\text{Var}(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{4p^2}$
- (E) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $\text{Var}(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{2}$.

Zadanie 8.

Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ ma rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_1 i wariancją 1, a każda ze zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \dots, Y_{20}$ rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_2 i wariancją 9. Założono, że wszystkie zmienne losowe są niezależne i wyznaczono, przy tych założeniach, test oparty na ilorazie wiarygodności dla testowania hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ przy alternatywie $H_1 : m_1 > m_2$ na poziomie istotności 0,1.

W rzeczywistości założenie to nie jest spełnione:

- co prawda pary zmiennych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ są niezależne, ale
- X_i, Y_i są zależne i współczynnik korelacji $\text{Corr}(X_i, Y_i) = \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, \dots, 20$.

Najmniejsza wartość różnicy $m_1 - m_2$ przy której faktyczna moc testu wynosi co najmniej 0,9 jest równa

- (A) 1,66
- (B) 1,76
- (C) 2,04
- (D) 2,14
- (E) 2,57

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 2$, są niezależne i $EX_i = m$ oraz $VarX_i = \frac{m^2}{i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie m jest nieznanym parametrem rzeczywistym. Niech $\tilde{m}$ będzie estymatorem parametru m minimalizującym błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

gdzie a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, są liczbami rzeczywistymi. Wtedy współczynniki a_i są równe

A) $a_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$

(B) $a_i = \frac{1}{n+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$

(C) $a_i = \frac{2i}{n(n+1)}$, $i = 1, 2, \dots, n$

(D) $a_i = \frac{2i}{n^2 + n + 2}$, $i = 1, 2, \dots, n$

(E) $a_i = \frac{2i}{n^2 + n - 2}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 5$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Wyznaczamy przedział ufności dla parametru θ postaci

$$[2X_{3:n}, 2X_{n-2:n}],$$

gdzie $X_{k:n}$ oznacza k -tą statystykę pozycyjną z próby $X_1, X_2, \dots, X_n$. Dla jakiej najmniejszej liczebności próby losowej n zachodzi

$$P_\theta(\theta \in [2X_{3:n}, 2X_{n-2:n}]) \geq 0,9$$

- (A) 8
- (B) 9
- (C) 10
- (D) 11
- (E) 12

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi ***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	B	
3	B	
4	B	
5	D	
6	B	
7	C	
8	A	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.