**Zadanie 1.**

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, zaś:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 ,$$

gdzie: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ .

Interesuje nas względny błąd estymacji:

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Przy $n = 10$ wartość oczekiwana $E(R^2)$ jest równa

(A) 0.18

(B) 0.19

(C) 0.01

(D) 0.20

(E) 0.21

**Zadanie 2.**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1.

Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym $bin^{-}\left(2, \frac{1}{e}\right)$

$$P(X_i = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{e}\right)^2\left(\frac{e-1}{e}\right)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.

Niech

$$M_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\} & gdy \;\; N > 0 \\ 0 & gdy \;\; N = 0 \end{cases}$$

Wyznacz $EM_N$.

(A) $e^{-1}$

(B) $\frac{e-2}{e^2}$

(C) $\frac{e-1}{e^2}$

(D) $e$

(E) $2(e-1)$

**Zadanie 3.**

W urnie znajduje się 40 kul, z których 25 jest białych i 15 czarnych. Losujemy bez zwracania najpierw 13 kul, a następnie z pozostałych kul w urnie losujemy bez zwracania 8 kul. Niech $S_1$ oznacza liczbę kul białych w pierwszym losowaniu, a $S_2$ liczbę kul białych w drugim losowaniu. Oblicz $Cov(S_1, S_2)$.

(A) $0$

(B) $\frac{5}{8}$

(C) $-\frac{5}{8}$

(D) $-\frac{65}{72}$

(E) $\frac{65}{72}$

**Zadanie 4.**

Losujemy ze zwracaniem po jednej karcie do gry z talii 52 kart tak długo aż wylosujemy pika. Niech $Y$ oznacza zmienną losową równą liczbie wyciągniętych kart, a $X$ zmienną losową równą liczbie kart, w których uzyskaliśmy karo. Oblicz $E(Y \mid X = 4)$.

(A) 10

(B) 9

(C) 12

(D) 6

(E) 7

**Zadanie 5.**

Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{\lambda}$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dla $n = 1,2,\ldots$.
Niech $Y$ będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1,\ldots,X_n,\ldots$, o rozkładzie gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} \beta^2 x \exp(-\beta x) & gdy\ \ x > 0 \\ 0 & gdy\ \ x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest ustaloną liczbą.
Niech

$$N = \max\{n \ge 0 : T_n \le Y\}.$$

Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $N$.

(A) $P(N = n) = (n+1)\left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\beta+\lambda}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(B) $P(N = n) = (n+1)\left(\frac{\lambda}{\beta+\lambda}\right)^2 \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(C) $P(N = 0) = \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^2$, $P(N = n) = \left(\frac{\lambda+2\beta}{\lambda+\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^2 \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^{n-1}$ dla $n = 1,2,\ldots$

(D) $P(N = n) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^n \frac{1}{n!}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(E) $P(N = n) = \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda}\right)\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

**Zadanie 6.**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p_c(x) = \begin{cases} \dfrac{4c^4}{x^5} & gdy \;\; x > c \\ 0 & gdy \;\; x \le c, \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy dwa estymatory parametru $c$ postaci $T_1 = a\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i $T_2 = b\overline{X}$, gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $a, b$ są dobrane tak, aby estymatory były nieobciążone. Wyznacz różnicę ryzyk estymatorów czyli

$$R = E(T_2 - c)^2 - E(T_1 - c)^2 \;.$$

(A) $\dfrac{(n-1)^2 c^2}{2n(2n-1)}$

(B) $\dfrac{9(n-1)^2 c^2}{4n(2n-1)}$

(C) $\dfrac{(n-1)c^2}{4n(2n-1)}$

(D) $\dfrac{(n-1)c^2}{2n(2n-1)}$

(E) $\dfrac{(n^2-1)c^2}{2n(2n-1)}$

**Zadanie 7.**

Niech $X$ będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x|) & gdy \;\; x \in [-\theta, \theta] \\ 0 & gdy \;\; x \notin [-\theta, \theta], \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq \theta_0$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarogodności na poziomie istotności 0.2. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 4\theta_0$ jest równa

(A) 0.80

(B) 0.74

(C) 0.65

(D) 0.40

(E) 0.37

**Zadanie 8.**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr $\theta$ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta) & gdy \;\; \theta > 0 \\ 0 & gdy \;\; \theta \le 0 \end{cases}.$$

Wyznacz estymator bayesowski $\hat{\theta}$ parametru $\theta$ przy funkcji straty Esschera równej $L(\theta, \hat{\theta}) = e^{c\theta}(\theta - \hat{\theta})^2$, gdzie $c \neq 0$ jest ustaloną liczbą.

(A) $\dfrac{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\alpha + n}$

(B) $\dfrac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - c}$

(C) $\dfrac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

(D) $\dfrac{\alpha + n}{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + c}$

(E) $\dfrac{\beta + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - c}{\alpha + n}$

**Zadanie 9.**

Zmienne losowe $U$ i $V$ są niezależne i mają rozkłady jednostajne na przedziale (0,2). Niech $X = \max\{U,V\}$ i $Y = \min\{U,V\}$. Wtedy prawdziwe jest następujące stwierdzenie

(A) $Cov(X,Y) = 0$

(B) $P\left(X^2 + Y^2 < 4\right) = 0.5$

(C) $P\left(X + Y \le 2\right) = 0.75$

(D) $P\left(X - Y \ge 1\right) = 0.5$

(E) $Cov(X,Y) = \frac{1}{9}$

## Zadanie 10.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4$ mają ten sam rozkład o dystrybuancie $F_{\mu_1}$, a zmienne losowe $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ mają ten sam rozkład o dystrybuancie $F_{\mu_2}$. Dystrybuanta $F_\mu$ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty *F*. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S \leq 13 \vee S \geq 27\},$$

gdzie *S* jest sumą rang zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, X_4$ w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznacz rozmiar testu.

(A) $\frac{8}{63}$

(B) $\frac{7}{63}$

(C) $\frac{6}{63}$

(D) $\frac{5}{63}$

(E) $\frac{4}{63}$

# Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.

## Prawdopodobieństwo i statystyka

## Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ........................K L U C Z  O D P O W I E D Z I..............................

~~Pesel~~ ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | B | |
| 2 | A | |
| 3 | C | |
| 4 | A | |
| 5 | A | |
| 6 | C | |
| 7 | C | |
| 8 | B | |
| 9 | E | |
| 10 | B | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.