**Zadanie 1.**

Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{64}{(2+x)^5} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases}.$$

Niech $Y$ będzie zmienną losową równą

$$Y = \begin{cases} 0 & gdy \;\; x \le 3 \\ X - 3 & gdy \;\; x > 3 \end{cases}.$$

Wyznaczyć $Var(Y \mid X > 3)$.

(A) $\dfrac{8}{9}$

(B) $1$

(C) $\dfrac{50}{9}$

(D) $\dfrac{12}{9}$

(E) $\dfrac{75}{9}$

**Zadanie 2.**

Niech $X_1, X_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ujemnym dwumianowym $bin^{-}\left(2, \frac{3}{4}\right)$

$$P(X_i = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\dots,$$

Wyznaczyć $P(X_1 = 3 \mid X_1 + X_2 = 6)$.

(A) $\frac{10}{21}$

(B) $\frac{4}{21}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{6}{21}$

(E) $\frac{11}{21}$

**Zadanie 3.**

Zmienna losowa $N$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej $N$. Każda ze zmiennych losowych $X_i$ ma rozkład Weibulla o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, które są większe od 10. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy cztery wartości większe od 10 i suma ich kwadratów jest równa 1200. Na podstawie tych danych wyznaczyć estymatory największej wiarogodności parametrów $\theta$ i $\lambda$.

(A) $\hat{\theta} = e^{-4}$ i $\hat{\lambda} = 4$

(B) $\hat{\theta} = \dfrac{1}{300}$ i $\hat{\lambda} = 4e$

(C) $\hat{\theta} = \dfrac{1}{300}$ i $\hat{\lambda} = 4e^{1/3}$

(D) $\hat{\theta} = \dfrac{1}{200}$ i $\hat{\lambda} = 4\sqrt{e}$

(E) $\hat{\theta} = e^{-4}$ i $\hat{\lambda} = 4e$

**Zadanie 4.**

W urnie znajdują się trzy kule białe i dwie czarne. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, odkładamy na bok i dorzucamy do urny kulę białą. Dopiero po trzykrotnym powtórzeniu doświadczenia w urnie nie było już kul czarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszym doświadczeniu wylosowano kulę czarną.

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{6}{125}$

(D) $\frac{8}{125}$

(E) $\frac{4}{7}$

**Zadanie 5.**

Załóżmy, że $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{\lambda}$. Niech

$$N = \min\left\{k \geq 0 : \sum_{i=0}^{k} X_i > a\right\},$$

gdzie $a$ jest ustaloną liczbą dodatnią. Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $N$.

(A) $P(N = k) = \frac{a}{a+\lambda}\left(\frac{\lambda}{a+\lambda}\right)^k$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

(B) $P(N = k) = \frac{\lambda}{a+\lambda}\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^k$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

(C) $P(N = k) = \exp\left(-\frac{a}{\lambda}\right)\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k \frac{1}{k!}$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

(D) $P(N = k) = \exp(-a\lambda)(a\lambda)^k \frac{1}{k!}$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

(E) $P(N = k) = \exp\left(-\frac{a}{a+\lambda}\right)\left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^k \frac{1}{k!}$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

**Zadanie 6.**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \theta]$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator nieobciążony parametru $\theta$ postaci

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = T_n = aX_{1:n},$$

gdzie $X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i $a$ jest pewną stałą. Wtedy

(A) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall \theta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0$

(B) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall \theta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$

(C) $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \theta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$

(D) $\exists \varepsilon > 0 \;\; \exists \theta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 1 + \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-1 + \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$

(E) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall \theta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 1 + \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-1 + \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$

**Zadanie 7.**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3\theta x^2 \exp\left(-\theta x^3\right) & gdy\ \ x > 0 \\ 0 & gdy\ \ x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Przedział ufności dla parametru $\theta$ w oparciu o estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ parametru $\theta$ otrzymujemy rozwiązując nierówność

$$\left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \sqrt{n} \right| \le z,$$

gdzie $\sigma(\theta)$ jest wariancją asymptotyczną statystyki $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ i liczba z spełnia

$$\lim_{n \to +\infty} P\left( \left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \sqrt{n} \right| \le z \right) = 0{,}95.$$

Tak otrzymany przedział ma postać

(A) $\left[ \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^3 \left(\sqrt{n} + 1{,}96\right)}, \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^3 \left(\sqrt{n} - 1{,}96\right)} \right]$

(B) $\left[ \dfrac{n\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^3 \left(\sqrt{n} + 1{,}96\right)}, \dfrac{n\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^3 \left(\sqrt{n} - 1{,}96\right)} \right]$

(C) $\left[ \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^3} \left(1 - \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right), \dfrac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^3} \left(1 + \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right) \right]$

(D) $\left[ \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + 1{,}96\right)}, \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + 1{,}96\right)} \right]$

(E) $\left[ \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^3}{n} \left(1 - \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right), \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^3}{n} \left(1 + \dfrac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right) \right]$

**Zadanie 8.**

Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_5$ są niezależne i mają rozkłady normalne $X_i \sim N(m\sqrt{i}, 1)$ zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : m = 0$ przy alternatywie $H_1 : m > 0$ na poziomie istotności 0,05.
W rzeczywistości okazało się, że wektor $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ ma rozkład normalny taki, że $EX_i = m\sqrt{i}$,

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} 0{,}5 & gdy \quad |i-j| = 1 \\ 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & w\ pp \end{cases}$$

Wyznaczyć rzeczywisty rozmiar testu.

(A) 0,11

(B) 0,08

(C) 0,15

(D) 0,07

(E) 0,02

**Zadanie 9.**

Obserwujemy $X_1, X_2, X_3, X_4$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1}{(1+x)^{\theta_1+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

i $Y_1, Y_2, \ldots Y_5$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_2}{(1+x)^{\theta_2+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta_1$ i $\theta_2$ są nieznanymi parametrami dodatnimi.

Wszystkie zmienne losowe są niezależne. Testujemy hipotezę $H_0 : \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = 2$ przy alternatywie $H_1 : \dfrac{\theta_1}{\theta_2} < 2$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} < t \right\}$$

gdzie $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ są estymatorami największej wiarogodności odpowiednio parametrów $\theta_1$ i $\theta_2$ wyznaczonymi na podstawie prób losowych $X_1, X_2, X_3, X_4$ i $Y_1, Y_2, \ldots Y_5$. Dobrać stałą $t$ tak, aby otrzymać test o rozmiarze 0,05.

(A) $t = 0{,}1628$

(B) $t = 1{,}5358$

(C) $t = 0{,}6511$

(D) $t = 1{,}6736$

(E) $t = 0{,}3852$

**Zadanie 10.**

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1. Obliczyć

$$E\left(\min\{X_0, X_1, \ldots, X_n\} \mid X_0\right)$$

(A) $\frac{1}{n}\left(1-\exp\left(-nX_0\right)\right)+X_0\exp\left(-nX_0\right)$

(B) $\frac{1}{n+1}\left(1-\exp\left(-(n+1)X_0\right)\right)+X_0\exp\left(-(n+1)X_0\right)$

(C) $\frac{1}{n}\left(1-\exp\left(-nX_0\right)\right)-X_0\exp\left(-nX_0\right)$

(D) $\frac{1}{n}\left(1-\exp\left(-nX_0\right)\right)$

(E) $\frac{1}{n+1}$

# Egzamin dla Aktuariuszy z 14 maja 2007 r.

## Prawdopodobieństwo i statystyka

## Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ........................ K L U C Z   O D P O W I E D Z I ..............................

~~Pesel~~ ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | C | |
| 2 | B | |
| 3 | D | |
| 4 | E | |
| 5 | D | |
| 6 | D | |
| 7 | B | |
| 8 | A | |
| 9 | C | |
| 10 | D | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.