Zadanie 1.
Załóżmy, że miesięczne notowania pewnej zmiennej y (np. kwoty składki przypisanej w pewnym ubezpieczeniu) spełniają założenia następującego modelu trendu liniowego z addytywnymi wahaniami sezonowymi:

$y_{t,j} = \beta\left(t + \frac{j}{12}\right) + \sum_{k=1}^{12} \alpha_k 1_{(k=j)} + \varepsilon_{t,j}$, gdzie:

$t = 1,2,...,T, T+1$ oznaczają kolejne lata kalendarzowe, zaś:

$j = 1,2,...,12$ to numery kolejnych miesięcy danego roku $\{1 \equiv sty, 2 \equiv lut, ..., 12 \equiv gru\}$.

- O rozkładzie warunkowym zmiennej $y_{t,j}$ przy danej wartości parametrów α_j, σ_j^2 zakładamy, że:

$$\mathrm{E}\left(y_{t,j} \middle| \alpha_j\right) = \beta\left(t + \frac{j}{12}\right) + \alpha_j \qquad \mathrm{Cov}\left(y_{t,j}, y_{\tau,j} \middle| \alpha_j\right) = \begin{cases} \sigma_j^2 & gdy \quad t = \tau \\ 0 & gdy \quad t \neq \tau \end{cases}$$

- O rozkładzie parametrów α_j, σ_j^2 zakładamy, że:

$$\mathrm{E}(\alpha_j) = \alpha \qquad \mathrm{Var}(\alpha_j) = a^2 \qquad \mathrm{E}(\sigma_j^2) = s^2$$

Załóżmy dalej, że znamy wartości parametrów α, β, a^2, s^2 oraz zaobserwowaliśmy realizacje styczniowe zmiennej y za lata od 1 do T, a naszym zadaniem jest predykcja tej zmiennej za styczeń roku $(T+1)$. W tych warunkach najlepszy liniowy nieobciążony predyktor jest postaci:

$$\mathrm{BLUP}\left(y_{T+1,1} \middle| y_{1,1}, y_{2,1}, ..., y_{T,1}\right) = \alpha + \beta\left(T + 1 + \frac{1}{12}\right) + \frac{a^2}{a^2 + s^2/T}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{t,1} - const\right)$$

Stała *const* występująca w powyższym wzorze wynosi:

(A) $\alpha + \beta\left(T + \frac{1}{12}\right)$

(B) $\alpha + \beta\left(T + \frac{13}{12}\right)$

(C) $\alpha + \beta\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{12}\right)$

(D) $\alpha + \beta\left(\frac{T}{2} + \frac{13}{12}\right)$

(E) $\alpha + \beta\left(\frac{T}{2} + \frac{7}{12}\right)$

Zadanie 2.
W uproszczonej wersji modelu Buhlmanna-Strauba obserwujemy realizacje zmiennych losowych $X_{t,k}$ dla $k=1,2,...,K$ kontraktów, w każdym z K przypadków przez $t=1,2,...,T$ okresów czasu.

- O rozkładzie warunkowym zmiennej $X_{t,k}$ przy ustalonej wartości parametru ryzyka μ_k zakładamy, że:

$$\mathrm{E}\left(X_{t,k}\middle|\mu_k\right)=\mu_k \qquad \mathrm{Cov}\left(X_{t,k},X_{\tau,j}\middle|\mu_k,\mu_j\right)=\begin{cases} s^2 & gdy \quad t=\tau \ oraz \ k=j \\ 0 & w\ p.\ p. \end{cases}$$

(*a więc zakładamy identyczną dla wszystkich zmiennych wariancję warunkową*)

- O rozkładzie a priori parametru ryzyka zakładamy, że:

$$\mathrm{E}\left(\mu_k\right)=\mu \qquad \mathrm{Cov}\left(\mu_k,\mu_j\right)=\begin{cases} a^2 & gdy \quad j=k \\ 0 & w\ p.\ p. \end{cases}$$

Przyjmijmy typowe oznaczenia: $\overline{X}_k=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{t,k}$ oraz $\overline{X}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\overline{X}_k$.

Wiadomo, że przy powyższych założeniach zachodzi:

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{K(T-1)}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{t,k}-\overline{X}_k\right)^2\right\}=s^2, \quad \text{oraz:}$$

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}\left(\overline{X}_k-\overline{X}\right)^2\right\}=a^2+\frac{s^2}{T}.$$

Iloraz pierwszej z powyższych statystyk przez drugą ma wartość oczekiwaną postaci:

$$\mathrm{E}\left\{\frac{\frac{1}{K(T\text{-}1)}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{t,k}-\overline{X}_k\right)^2}{\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}\left(\overline{X}_k-\overline{X}\right)^2}\right\}=\frac{s^2}{a^2+\frac{s^2}{T}}\cdot const$$

Oczywiście bez dodatkowych założeń nie da się wyznaczyć wartości stałej *const* (nie ma nawet pewności czy jest to liczba skończona). Jeśli jednak założymy że liczba kontraktów K nie jest nazbyt mała oraz że wszystkie zmienne:

- μ_k , $k=1,2,...,K$ oraz:
- $(X_{t,k}-\mu_k)$, $k=1,2,...,K$, $t=1,2,...,T$

są niezależnymi zmiennymi o rozkładach normalnych, **to wtedy stała *const* wynosi**:

(A) $\frac{K-1}{K-3}$

(B) $\frac{K-1}{K-2}$

(C) $\frac{K}{K-2}$

(D) $\frac{K}{K-1}$

(E) $\frac{K-2}{K-3}$

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela ze szkodami o wartości zawsze równej 1, a więc proces:
$U(t) = u + (1+\theta)\lambda t - N(t)$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $\theta > 0$, a więc narzut bezpieczeństwa na składkę jest dodatni

Niech $\Psi(u)$ oznacza prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu, traktowane jako funkcja kapitału początkowego *u*, zaś *R* współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*). Spośród podanych poniżej stwierdzeń o tej funkcji **wybierz stwierdzenie prawdziwe.**

(A) $\forall u \ge 0 \quad \Psi(u) \le \frac{1}{1+\theta}\exp(-Ru)$

(B) $\forall u \ge 0 \quad \Psi(u) \ge \frac{1}{1+\theta}\exp(-Ru)$

(C) $\exists u_0 > 0$ takie, że:

$$\Psi(u) \ge \frac{\exp(-Ru)}{1+\theta} \text{ dla } u \in [0, u_0], \text{ oraz } \Psi(u) \le \frac{\exp(-Ru)}{1+\theta} \text{ dla } u > u_0$$

(D) $\exists u_0 > 0$ takie, że:

$$\Psi(u) \le \frac{\exp(-Ru)}{1+\theta} \text{ dla } u \in [0, u_0], \text{ oraz } \Psi(u) \ge \frac{\exp(-Ru)}{1+\theta} \text{ dla } u > u_0$$

(E) żadne z powyższych zdań nie jest prawdziwe

Wskazówka: może Ci pomóc rozważenie związku rozkładu zmiennej L_1 (deficytu w momencie ruiny o ile proces startuje z zerowej nadwyżki początkowej) z rozkładem deficytu w momencie ruiny w ogólnym przypadku, a więc gdy proces startuje z dowolnej nadwyżki początkowej

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:
$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$, o wartości oczekiwanej μ_Y

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 3$, $\theta = \frac{1}{9}$, oraz $u = 4\mu_Y$

Prawdopodobieństwo, iż do ruiny dojdzie, i to dojdzie w pierwszym momencie, w którym nadwyżka spadła poniżej poziomu wyjściowego *u*, a więc że:
$\exists T > 0$ takie, że:

- $U(T) < 0$ oraz $\forall t \in (0, T)$ $U(t) \geq u$

wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{10}$

Zadanie 5.
O rozkładzie zmiennej X wiadomo, iż:

- $\Pr(X = 0) = 0.7$
- $\Pr(X > 0) = 0.3$
- $\mathrm{E}(X \mid X > 0) = 90$

Zbiór dopuszczalnych wartości $\mathrm{E}\left[(X - 20)_+\right]$ **jest przedziałem**:

(A) [24; 27)

(B) [7; 27)

(C) [7; 24)

(D) [21; 24)

(E) [21; 27)

Zadanie 6.
Wartość oczekiwana szkód X jest funkcją parametru Θ charakteryzującego dane ryzyko, i wynosi $\mathrm{E}(X|\Theta)=\Theta$. Ubezpieczyciel nie wie, jaką wartością parametru ryzyka charakteryzują się poszczególne ryzyka. Wie jednak że rozkład parametru ryzyka w populacji ryzyk dany jest gęstością:

- $f_{\Theta}(\theta)=6\theta(1-\theta)$, $\theta\in(0,1)$ (i równą zero poza tym przedziałem).

Podmioty narażone na to ryzyko (znające „swoją" wartość parametru ryzyka Θ) decydują się zawrzeć umowę ubezpieczenia o ile składka P nie jest zbyt wysoka. Oznaczmy przez U zmienną losową która przyjmie wartość 1 o ile podmiot zawrze umowę, zaś 0 o ile nie zawrze. Niech:

- $\Pr(U=1|\Theta)=1-\dfrac{P}{2\Theta}$ gdy $P<2\Theta$
- $\Pr(U=1|\Theta)=0$ gdy $P\geq 2\Theta$

Jeśli ubezpieczyciel ustali wysokość składki na poziomie $P=\dfrac{3}{4}$, to wartość oczekiwana zysku na przeciętnym podmiocie z tej populacji (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:

- $P-\mathrm{E}(X|U=1)$

wyniesie:

(A) 0

(B) 1/32

(C) 1/24

(D) 1/16

(E) 1/12

Zadanie 7.
Moment zajścia T losowo wybranej szkody spośród tych, które zaszły w ciągu dziesięciu lat ma rozkład dany na odcinku czasu $t \in (0, 10)$ gęstością:

- $f_T(t) = \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{10}t\right)}{10(e-1)}$.

Czas likwidacji szkody D jest zmienną losową niezależną od czasu jej zajścia T i ma rozkład dany na odcinku czasu $x \in (0, 10)$ gęstością:

- $f_D(x) = \dfrac{10-x}{50}$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana szkoda pozostaje wciąż nie-zlikwidowana na koniec dziesiątego roku, czyli:

- $\Pr(T + D > 10)$,

wynosi:

(A) $\dfrac{e-2}{e-1}$

(B) $\dfrac{e-\sqrt{e}}{e-1}$

(C) $\dfrac{1}{e-1}$

(D) $\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}$

(E) $\dfrac{1}{2(e-1)}$

Zadanie 8.
Przy danej wartości parametru ryzyka Λ liczba szkód w pierwszym roku ubezpieczenia N_1 i liczba szkód w drugim roku ubezpieczenia N_2 to niezależne zmienne o identycznym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej równej Λ. Wartość parametru ryzyka Λ jest wynikiem losowania ubezpieczonego z populacji ubezpieczonych, w której rozkład parametru ryzyka Λ dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$,
- z parametrami o wartościach $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Wariancja warunkowa liczby szkód w drugim roku pod warunkiem że w pierwszym roku doszło do jednej szkody $\mathrm{Var}(N_2 | N_1 = 1)$ **wynosi**:

(A) 8/9

(B) 3/4

(C) 11/12

(D) 15/16

(E) 4/3

Zadanie 9.
O rozkładzie liczby szkód N wiemy, że:

$$\Pr(N=0)=\frac{1}{8},$$

$$\Pr(N=k)=\frac{\ln 2}{k}\Pr(N=k-1), \qquad k=2,3,...$$

Stosunek wariancji do wartości oczekiwanej zmiennej N **wynosi**:

(A) $\ln 2$

(B) $1-\frac{1}{2}\ln 2$

(C) $1-\frac{3}{4}\ln 2$

(D) $2\ln 2$

(E) $1-\ln 2$

Zadanie 10.
X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0,1,2,...\}$. Znamy wartości dystrybuanty $F_1(x) = \Pr(X_1 \le x)$ oraz $F_S(x) = \Pr(X_1 + X_2 \le x)$:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.18
1	0.8	0.48
2	0.9	0.65
3	1	0.86

$\Pr(X_2 = 2)$ **wynosi**:

(A) 0

(B) 0.1

(C) 0.2

(D) 0.3

(E) 0.4

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 stycznia 2007 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... .K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	B	
4	E	
5	E	
6	D	
7	A	
8	D	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.