Zadanie 1.

Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku dla łańcucha Markowa $X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots$ o trzech stanach $\{1, 2, 3\}$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element p_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$).

Wtedy $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})$ jest równa

(A) 2,125

(B) 0,125

(C) 0,375

(D) 1,875

(E) 0

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [1, 2]. Niech N będzie zmienną losowa o rozkładzie ujemnym dwumianowym

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.
Niech

$$M_N = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \ldots, X_N) & gdy \ \ N > 0 \\ 0 & gdy \ \ N = 0 \end{cases}$$

Obliczyć $E(M_N)$.

(A) $2 - 2p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p$

(B) $2 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$

(C) $2 + p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$

(D) $2 - p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$

(E) $2 - p^2 - p$

Zadanie 3.

Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $\mathrm{E}X_i = \mathrm{E}Y_i = \mu$, $\mathrm{Var}X_i = \sigma^2$, $\mathrm{Var}Y_i = 4\sigma^2$ dla $i = 1,2,\ldots,n$. Parametry μ i σ są nieznane. Niech $\hat{\sigma}^2$ będzie estymatorem największej wiarogodności parametru σ^2 w tym modelu. Wyznaczyć stałą a, tak aby $\tilde{\sigma}^2 = a\hat{\sigma}^2$ był estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

A) $a = \dfrac{8n}{8n-4}$

(B) $a = 1$

(C) $a = \dfrac{8n}{8n-1}$

(D) $a = \dfrac{8n}{8n-8}$

(E) $a = \dfrac{8n}{8n-2}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się razem 76 kul: białych i czarnych. Wylosowano 10 kul, wśród których było 6 kul białych. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności liczby kul białych w urnie.

(A) 43

(B) 44

(C) 45

(D) 46

(E) 47

Zadanie 5.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, przy czym $\mathrm{E}X = 4$ i $\mathrm{E}Y = 6$. Rozważamy zmienną losową $Z = \frac{X}{X+Y}$.

Wtedy

(A) $\mathrm{E}Z = 0{,}4$

(B) funkcja gęstości zmiennej losowej Z wyraża się wzorem $g(z) = 504z^3(1-z)^5$ dla $z \in (0{,}1)$

(C) mediana rozkładu zmiennej losowej Z jest równa 0,4

(D) funkcja gęstości zmiennej losowej Z wyraża się wzorem $g(z) = 140z^3(1-z)^3$ dla $z \in (0{,}1)$

(E) mediana rozkładu zmiennej losowej Z jest równa 0,5

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ciągłym o ściśle rosnącej dystrybuancie F. Hipotezę

H_0 : F jest dystrybuantą rozkładu symetrycznego, tzn. takiego że dla każdego x

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$K > 7 \text{ lub } K < 3$$

gdzie K jest liczbą elementów w próbie losowej $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ o wartościach większych od 0. Wyznaczyć rozmiar testu.

(A) $\frac{5}{64}$

(B) $\frac{9}{64}$

(C) $\frac{7}{64}$

(D) $\frac{17}{64}$

(E) $\frac{15}{64}$

Zadanie 7.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ są niezależne o jednakowym rozkładzie normalnym $N(m, \sigma^2)$. Niech $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$ i $S_{25} = \sum_{i=1}^{25} X_i$. Wtedy $E\left(S_{10}^2 \mid S_{25}\right)$ jest równa

(A) $15\sigma^2 + 0{,}4S_{25}^2$

(B) $6\sigma^2 + 0{,}4S_{25}^2$

(C) $0{,}4S_{25}^2$

(D) $6\sigma^2 + 0{,}16S_{25}^2$

(E) $15\sigma^2 + 0{,}16S_{25}^2$

Zadanie 8.

Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Niestety sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości 0. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność odnotowanych realizacji wynosi *n*. Tak więc, każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $K_1, K_2, \ldots, K_n$ wynosi co najmniej 1 i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się obserwacji o wartości 0. Estymujemy parametr λ za pomocą estymatora postaci

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{+\infty} iN_i ,$$

gdzie N_i jest liczbą obserwacji o wartości *i*. Obliczyć wariancję estymatora $\hat{\lambda}$.

(A) $\frac{1}{n}[\lambda - \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \lambda e^{-\lambda} - 2\lambda\right)]$

(B) $\frac{\lambda^2}{n}$

(C) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda^2 e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

(D) $\frac{\lambda^2 + \lambda - \lambda e^{-\lambda}}{n(1 - e^{-\lambda})}$

(E) $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

Zadanie 9.

Obserwujemy X_1, X_2, X_3, X_4 niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\theta_1}\theta_1}{(2+x)^{\theta_1+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

i $Y_1, Y_2, \ldots Y_5$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_{\theta_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\theta_2}\theta_2}{(2+x)^{\theta_2+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

gdzie θ_1 i θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi.

Wszystkie zmienne losowe są niezależne. Testujemy hipotezę $H_0 : \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = 1$ przy alternatywie $H_1 : \dfrac{\theta_1}{\theta_2} > 1$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > t \right\}$$

gdzie $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ są estymatorami największej wiarogodności odpowiednio parametrów θ_1 i θ_2 wyznaczonymi na podstawie prób losowych $X_1, X_2, \ldots, X_4$ i $Y_1, Y_2, \ldots Y_5$. Dobrać stałą t tak, aby otrzymać test o rozmiarze 0,05.

(A) $t = 6{,}256$

(B) $t = 3{,}347$

(C) $t = 3{,}072$

(D) $t = 5{,}192$

(E) $t = 4{,}184$

Zadanie 10.

Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $\mathrm{E}X_i = \mu$ i $\mathrm{Var}X_i = \dfrac{\sigma^2}{i}$, gdzie parametry $\mu \in R$ i $\sigma > 0$ są nieznane. Budujemy przedział ufności $\left[\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2\right]$ dla parametru σ^2 na poziomie ufności 0,9.

Niech $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12}$ i $\overline{X}_w = \dfrac{\sum_{i=1}^{12} iX_i}{78}$.

Dla którego z poniższych przedziałów zachodzi

$$P\left(\hat{\sigma}_1^2 > \sigma^2\right) = P\left(\hat{\sigma}_2^2 < \sigma^2\right) = 0{,}05\,?$$

(A) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{19{,}6752}, \dfrac{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{4{,}5748}\right]$

(B) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{12} i\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{19{,}6752}, \dfrac{\sum_{i=1}^{12} i\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{4{,}5748}\right]$

(C) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{12} i\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{19{,}6752}, \dfrac{\sum_{i=1}^{12} i\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{4{,}5748}\right]$

(D) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{12} \frac{i}{78}\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{19{,}6752}, \dfrac{\sum_{i=1}^{12} \frac{i}{78}\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{4{,}5748}\right]$

(E) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{19{,}6752}, \dfrac{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i - \overline{X}_w\right)^2}{4{,}5748}\right]$

Egzamin dla Aktuariuszy z 9 października 2006 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	D	
5	C	
6	C	
7	D	
8	E	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.