Zadanie 1.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,..., \quad S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n,$

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3,...$ są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą jeden.
Niech dla każdej liczby naturalnej *n*:

- $\Psi_n(u) \doteq \Pr\left(U_0 < 0 \vee U_1 < 0 \vee U_2 < 0 \vee ... \vee U_n < 0 \middle| U_0 = u\right)$

oznacza funkcję (zmiennej rzeczywistej *u*) prawdopodobieństwa ruiny w ciągu *n* pierwszych okresów czasu. Jasne jest, że:

- $\Psi_1(u) = \exp(-(u+c))$.

Stosując odpowiedni wzór rekurencyjny wyznaczono następne 2 wyrazy ciągu funkcji, które dla $u \geq 0$ okazały się mieć postać:

- $\Psi_2(u) = \exp(-(u+c)) + (u+c)\exp(-(u+2c))$
- $\Psi_3(u) = \exp(-(u+c)) + (u+c)\exp(-(u+2c)) + \frac{(u+c)(u+3c)}{2}\exp(-(u+3c))$

Znajdź postać funkcji $\Psi_4(u)$.
Przy założeniu, że $c = 1$, **jej wartość w punkcie** $u = 1$ **wynosi**:

(A) $\Psi_4(1) = \exp(-2) + 2\exp(-3) + 4\exp(-4) + \frac{25}{3}\exp(-5)$

(B) $\Psi_4(1) = \exp(-2) + 2\exp(-3) + 4\exp(-4) + \frac{8}{3}\exp(-5)$

(C) $\Psi_4(1) = \exp(-2) + 2\exp(-3) + 4\exp(-4) + \frac{24}{3}\exp(-5)$

(D) $\Psi_4(1) = \exp(-2) + 2\exp(-3) + 4\exp(-4) + \frac{28}{3}\exp(-5)$

(E) $\Psi_4(1) = \exp(-2) + 2\exp(-3) + 4\exp(-4) + \frac{16}{3}\exp(-5)$

Zadanie 2.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...$, $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$,

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3, ...$ są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą jeden.
Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $c = 2\ln 2$
- $u = 6\ln 2$

to **prawdopodobieństwo ruiny** w nieskończonym horyzoncie czasu **wynosi**:

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1}{32}$

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową $U(t) = ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$
- $E(Y_1) = 1/5$

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. **Przedział**, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) **jest postaci**:

(A) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right]$

(E) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$

Zadanie 4.
Niech dla kierowcy posiadającego roczne ubezpieczenie OC oraz AC:

- N oznacza liczbę wypadków skutkujących w szkodach z obu ubezpieczeń,
- N_O oznacza liczbę wypadków skutkujących w szkodach tylko z OC,
- N_A oznacza liczbę wypadków skutkujących w szkodach tylko z AC.

Przy danej wartości parametrów ryzyka (Λ, Θ) charakteryzujących kierowcę zmienne te są warunkowo niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi równymi odpowiednio:

- $E(N|\Lambda, \Theta) = \Lambda$
- $E(N_O|\Lambda, \Theta) = \frac{1}{4}\Lambda$
- $E(N_A|\Lambda, \Theta) = \frac{1}{3}\Lambda + \Theta$

Rozkład parametrów ryzyka (Λ, Θ) w populacji kierowców posiadających roczne ubezpieczenie OC oraz AC charakteryzuje się tym, że:

- (Λ, Θ) są niezależne
- $E(\Lambda) = \frac{1}{20}$, $\mathrm{Var}(\Lambda) = \frac{1}{500}$
- $E(\Theta) = \frac{1}{40}$, $\mathrm{Var}(\Theta) = \frac{1}{1000}$

Kowariancja liczby wypadków z OC z liczbą wypadków z AC:

$$\mathrm{Cov}(N + N_O, N + N_A)$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{300}$

(B) $\frac{307}{6000}$

(C) $\frac{26}{500}$

(D) $\frac{319}{6000}$

(E) $\frac{4}{75}$

Zadanie 5.
Proces pojawiania się szkód w czasie $N(t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych, o rozkładzie ujemnym dwumianowym danym dla każdego nieujemnego t oraz dodatniego s wzorem:

$$\Pr\left(N(t+s)-N(t)=k\right)=\frac{\Gamma(r\cdot s+k)}{k!\cdot\Gamma(r\cdot s)}\cdot(1-q)^{r\cdot s}\cdot q^k\,,\qquad k=0,1,...$$

gdzie $r=5$ oraz $q=\frac{1}{2}$ to parametry procesu.

Oblicz granicę prawdopodobieństw warunkowych:

$$\lim_{s\to 0}\Pr\left(N(t+s)-N(t)=1\,\middle|\,N(t+s)-N(t)>0\right)$$

(A) 1

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\ln 2$

(D) $\frac{1}{2\ln 2}$

(E) $\frac{1}{5\ln 2}$

Uwaga: Intuicyjnie - pytanie dotyczy prawdopodobieństwa, iż w momencie, w którym dojdzie do przyrostu procesu, wystąpi równocześnie więcej niż jedna szkoda

Zadanie 6.
Ryzyko X wyceniamy zgodnie z formułą:
$\Pi_y(X) = y + \mathrm{E}\left[(X - y)_+\right]$,
gdzie $y = F_X^{-1}(1-\varepsilon)$ jest kwantylem rzędu $(1-\varepsilon)$ rozkładu zmiennej X.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że zmienna X ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Dla $\varepsilon = 0.05$ przeprowadziliśmy obliczenia, i w wyniku otrzymaliśmy:
$\Pi_{1.645}(X) = 1.6659$
Wobec tego $\Pi_{1.545}(X)$ z dobrym przybliżeniem **wynosi**:

(A) 1.5690

(B) 1.5715

(C) 1.5740

(D) 1.5765

(E) 1.5790

Wskazówka: aproksymacja liniowa z wykorzystaniem pierwszej pochodnej obarczona jest błędem na tyle małym, że pozwoli na wskazanie prawidłowej odpowiedzi

Zadanie 7.
Zmienna losowa:
$X = Y_1 + ... + Y_N$
ma złożony rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda = 1$. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika Y. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,...,4$ prawdopodobieństwa $\Pr(X = k)$.

k	$\Pr(Y = k)$	$\Pr(X = k)$
0	0	0.36788
1	0.2	0.07358
2	0.4	0.15451
3	0.1	0.06671
4	0.1	0.07654
5	0.2	

Wobec tego $\Pr(X = 5)$ z dobrym przybliżeniem **wynosi**:

(A) 0.0925

(B) 0.0950

(C) 0.0975

(D) 0.1000

(E) 0.1025

Zadanie 8.

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} t$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą dwa (lata).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. **Prawdopodobieństwo**, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem **wynosi**:

(A) 0.74

(B) 0.76

(C) 0.78

(D) 0.80

(E) 0.82

Zadanie 9.
Łączna wartość szkód z polisy wynosi:
$X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$).
Przy danej wartości parametru ryzyka Λ zmienna X ma rozkład złożony Poissona:

- z oczekiwaną liczbą szkód równą $E(N|\Lambda) = \Lambda$
- i rozkładem pojedynczej szkody gamma o gęstości $f_{Y|\Lambda}(y) = \Lambda y \exp\left(-\sqrt{\Lambda} y\right)$.

Zróżnicowanie parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych opisuje rozkład Gamma o parametrach $(2, 10)$, tzn. o gęstości na półosi dodatniej danej wzorem:
$f_\Lambda(\lambda) = 10^2 \cdot \lambda \cdot e^{-10 \cdot \lambda}$.
Wartość oczekiwana (bezwarunkowa) zmiennej X **wynosi**:

(A) $\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2\sqrt{10}}$

(B) $\dfrac{\sqrt{10\pi}}{4}$

(C) $\dfrac{\sqrt{10\pi}}{2}$

(D) $\sqrt{10\pi}$

(E) $\dfrac{\sqrt{10\pi}}{3}$

Wskazówka: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Zadanie 10. (*poprawione po egzaminie*)
Oznaczmy przez X_t łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, przez $X_{t,0}$ tę jej część, która dotyczy szkód zlikwidowanych przed końcem roku *t*, zaś przez $X_{t,1}$ część pozostałą. Warunkowe momenty tych zmiennych (przy danej wartości parametru ryzyka μ_t) spełniają założenia:

- $E(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p$
- $E(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)$
- $Var(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t pb^2$
- $Var(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)b^2$
- $Cov(X_{t,0}, X_{t,1}|\mu_t) = 0$,

zaś rozkład parametru ryzyka μ_t spełnia założenia:

- $E(\mu_t) = \mu$
- $Var(\mu_t) = a^2$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor zmiennej μ_t oparty na informacji o zmiennej $X_{t,0}$ oraz znanych wartościach parametrów (p, b^2, μ, a^2) jest postaci:

- $BLUP(\mu_t|X_{t,0}) = cX_{t,0} + d$

Współczynnik *c* występujący w powyższym wzorze **jest postaci**:

(A) $c = \dfrac{a^2}{p(\mu b^2 + a^2)}$

(B) $c = \dfrac{pa^2}{\mu b^2 + p^2 a^2}$

(C) $c = \dfrac{a^2}{\mu b^2 + pa^2}$

(D) $c = \dfrac{a^2}{b^2 + pa^2}$

(E) $c = \dfrac{pa^2}{b^2 + p^2 a^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 9 października 2006 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	E	
4	E	
5	D	
6	B	
7	E	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.