Zadanie 1.
W pewnej populacji kierowców każdego jej członka charakteryzują trzy zmienne:
- K – liczba przejeżdżanych kilometrów (w tysiącach rocznie)
- NP – liczba szkód w ciągu roku, w których kierowca jest stroną poszkodowaną
- NS – liczba szkód w ciągu roku, w których kierowca jest sprawcą

Pojedynczą szkodę zdefiniowano w taki sposób, że każdej szkodzie odpowiada dokładnie jeden sprawca i jeden poszkodowany, że są to zawsze dwie różne osoby, przy tym obie należą do rozważanej populacji.
- Zmienna K ma w populacji kierowców rozkład Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem $f_K(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$

Przyjmujemy prosty model, w którym doświadczenie kierowcy zmniejsza ryzyko (w przeliczeniu na tysiąc przejechanych kilometrów):
- $\frac{1}{K} \mathrm{E}(NS|K) = a_S \exp(-b_S K)$,
- $\frac{1}{K} \mathrm{E}(NP|K) = a_P \exp(-b_P K)$,

gdzie wszystkie parametry a_S, b_S, a_P, b_P mają wartości dodatnie, przy czym $b_S > b_P$, ponieważ doświadczenie kierowcy redukuje przede wszystkim szansę spowodowania szkody, a w mniejszym stopniu redukuje ryzyko „zostania poszkodowanym”.

Jasne jest, że w tym modelu kierowcy jeżdżący mało będą częściej sprawcami niż poszkodowanymi, zaś kierowcy jeżdżący dużo będą częściej poszkodowanymi niż sprawcami. Niech K^* oznacza taką liczbę tysięcy kilometrów przejeżdżanych rocznie przez kierowcę, dla której warunkowe (przy danym K) oczekiwane liczby szkód obu rodzajów są równe.
Przy założeniach, że:
- $\alpha = 2$, $\beta = 1/5$, $b_S = 1/20$, $b_P = 1/40$

liczba K^* z dobrym przybliżeniem wyniesie:

(A) 13.4

(B) 12.6

(C) 11.8

(D) 10.9

(E) 10.0

Zadanie 2.

O zmiennej losowej X wiemy, że:

- $\Pr(X \geq 0) = 1$
- $\mathrm{E}(X) = 25$
- $F_X(0) = 0.7$
- $F_X(10) = 0.9$
- $\mathrm{E}(X \mid X \in (0, 10]) = 7.5$

Przy tych założeniach najmniejsza możliwa wartość $\mathrm{E}\{(X-6)_+\}$ wynosi:

(A) 22.9

(B) 23.0

(C) 23.1

(D) 23.2

(E) 23.3

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat z tytułu n pierwszych wypadków
- wypłata X_i jest równa łącznej kwocie szkód z jednego wypadku: $X_i = Y_i(1) + ... + Y_i(M_i)$
- kwoty szkód $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ oraz liczby szkód przypadających na poszczególne wypadki $M_1, M_2, M_3, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeśli przyjmiemy następujące założenia:

- zmienne $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej jeden
- zmienne $M_1, M_2, M_3, ...$ mają ten sam rozkład przesunięty geometryczny:

  $\Pr(M_i = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ dla $k = 1,2,...$
- parametr składki wynosi $c = \lambda \cdot \mathrm{E}(X_1) \cdot 120\%$

wtedy współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniesie:

(A) 1/6

(B) 1/18

(C) 1/9

(D) 1/10

(E) 1/12

Zadanie 4.
Niech w złożonym procesie Poissona (T_n, Y_n) oznaczają moment zajścia i wartość n-tej szkody, zaś $\Delta T_1 = T_1$ oraz $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ czasy oczekiwania. Oczywiście:

- $\Delta T_1, Y_1, \Delta T_2, Y_2, \Delta T_3, Y_3, \ldots$ są niezależne,
- $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej λ^{-1}
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład o skończonej wartości oczekiwanej μ_Y i wariancji σ_Y^2.

Niech $S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \exp(-\delta T_n)$ oznacza zdyskontowaną wartość szkód (wszystkich).
Wariancja zmiennej S wyraża się wzorem:

(A) $\mathrm{Var}(S) = \frac{\lambda}{\delta}\left(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2\right)$

(B) $\mathrm{Var}(S) = \frac{\lambda}{2\delta}\left(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2\right)$

(C) $\mathrm{Var}(S) = \frac{\lambda}{2\delta}\left(2\sigma_Y^2 + \mu_Y^2\right)$

(D) $\mathrm{Var}(S) = \frac{\lambda}{2\delta}\sigma_Y^2$

(E) $\mathrm{Var}(S) = \frac{\lambda}{\delta}\sigma_Y^2$

Wskazówka: *Jeśli przez* S_2 *oznaczysz wartość szkód zdyskontowaną na moment tuż po zajściu pierwszej szkody:* $S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \exp(-\delta(T_n - T_1))$, *to zmienna ta ma oczywiście dokładnie ten sam rozkład co zmienna S, a związane są te zmienne równaniem:*

$$S = \exp(-\delta T_1)(Y_1 + S_2),$$

gdzie trzy zmienne występujące po prawej stronie są niezależne. Wykorzystując ten fakt łatwo otrzymasz wynik $\mathrm{E}(S) = \frac{\lambda}{\delta}\mu_Y$. *Pozostało wyznaczyć wariancję.*

Zadanie 5.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z zerową nadwyżką początkową, z dodatnią wartością oczekiwaną przyrostów procesu, oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{\textit{poza tym}} \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) wynosi:

(A) 1/12

(B) 2/12

(C) 3/12

(D) 4/12

(E) 5/12

Zadanie 6.

$N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

- $F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.
Niech $m_{0.95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \le m_{0.95}) = 0.95$
Liczba $m_{0.95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

(A) 14.0

(B) 13.0

(C) 11.9

(D) 10.8

(E) 9.7

Zadanie 7.
Liczby szkód $N_1,...N_t,N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q=q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym o parametrach $(1,q)$. Niech $N=N_1+...+N_t$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o rozkładzie beta o gęstości:

$$f_Q(q)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot q^{\alpha-1}\cdot(1-q)^{\beta-1},\quad q\in(0,1),\qquad \alpha,\beta>0.$$

Wobec tego $\mathrm{VAR}(N_{t+1}/N_1,...,N_t)$ wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{(\alpha+N)(\beta+t-N)}{(\alpha+\beta+t)^2}$

(B) $\dfrac{(\alpha+N)(\beta+t-N)}{(\alpha+\beta+t)^2(\alpha+\beta+t+1)}$

(C) $\dfrac{(\alpha+N)(\beta+t-N)}{(\alpha+\beta+t)(\alpha+\beta+t+1)}$

(D) $\dfrac{(\alpha+N)(\beta+t-N)}{(\alpha+\beta+t)(\alpha+\beta+t+1)(\alpha+\beta+t+2)}$

(E) $\dfrac{(\alpha+N)(\beta+t-N)}{(\alpha+\beta+t)^2(\alpha+\beta+t+2)}$

Zadanie 8.
W pewnym portfelu ryzyk łączna wartość szkód:

$$W = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 200$ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y wykładniczym z wartością oczekiwaną $E(Y) = 10$.
Niech:

$Y_{M,i} = \min\{Y_i, M\}$; $\quad i = 1,2,..., N$, oraz niech:

$W_M = Y_{M,1} + ... + Y_{M,N}$,

gdzie W_M oznacza tę część łącznej wartości szkód W, która pozostaje na udziale ubezpieczyciela (po scedowaniu nadwyżki każdej szkody z tego portfela ponad M na reasekuratora). Aktualnie parametrem kontraktu reasekuracyjnego jest wartość zachowku $M = 42$. Rozważamy jednak możliwość zmiany tego parametru, oraz wpływ takiej zmiany na charakterystyki zmiennej losowej W_M.
Pochodna wariancji zmiennej W_M:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Var}(W_M)}{\partial M}\right|_{M=42}$$

wynosi (w przybliżeniu do jednej dziesiątej):

(A) 240

(B) 246

(C) 252

(D) 234

(E) 228

Zadanie 9.

Niech:

- Y – oznacza wartość szkody.
- D – oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, który otrzymujemy w wyniku doświadczenia polegającego na losowaniu z populacji szkód z równym prawdopodobieństwem wyboru każdej szkody
- Zdefiniujmy nową zmienną DW, którą będziemy interpretować jako czas likwidacji szkody uzyskany w wyniku losowania szkody z populacji szkód z prawdopodobieństwem wyboru proporcjonalnym do wartości szkody.

Jeśli więc założymy ciągły rozkład łączny zmiennych Y oraz D, to gęstość brzegową zmiennej DW możemy wyrazić wzorem:

- $f_{DW}(x) = f_D(x)\dfrac{\mathrm{E}(Y|D=x)}{\mathrm{E}(Y)}$.

Załóżmy, że zmienna D ma w populacji szkód rozkład Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem

$$f_D(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\exp(-\beta x),$$

oraz że oczekiwana wartość szkody pod warunkiem czasu likwidacji dana jest wzorem:

$$\mathrm{E}(Y|D) = \mu_0 + \mu_1 D.$$

Jeśli parametry zadania wynoszą:

$\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 1/2$, $\alpha = 3/2$, $\beta = 5/2$

to wartość oczekiwana zmiennej DW wyniesie:

(A) 9/13

(B) 3/5

(C) 3/4

(D) 8/13

(E) 9/14

Zadanie 10.

W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ ma rozkład warunkowy Poissona z wartością oczekiwaną λt.

Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$,

z parametrami $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

Pewnego ubezpieczonego ubezpieczyliśmy w tym roku po raz pierwszy.

Prawdopodobieństwo, że ubezpieczony ten nie zgłosi żadnych szkód w drugim półroczu, pod warunkiem że nie zgłosił szkód w pierwszym półroczu, w przybliżeniu wynosi:

(A) 0.800

(B) 0.810

(C) 0.819

(D) 0.826

(E) 0.833

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 czerwca 2006 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	E	
4	B	
5	C	
6	B	
7	A	
8	C	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.