Zadanie 1.
W konkursie złożonym z trzech etapów startuje niezależnie n uczestników. Prawdopodobieństwo, że uczestnik odpadnie po pierwszym etapie jest równe θ. Prawdopodobieństwo, że uczestnik, który przeszedł etap pierwszy, odpadnie w etapie drugim też jest równe θ. Niech K oznacza liczbę uczestników, którzy odpadli w pierwszym etapie, zaś M liczbę uczestników, którzy odpadli w etapie drugim. Jeżeli $\theta = \frac{3}{5}$, to prawdopodobieństwo $P(K + M = k)$ dla $k \in \{0,1,\dots,n\}$ jest równe

(A) $\binom{n}{k}\frac{9^k 16^{n-k}}{5^{2n}}$

(B) $\binom{n}{k}\frac{9^{n-k} 16^{k}}{5^{2n}}$

(C) $\binom{n}{k}\frac{4^k 21^{n-k}}{5^{2n}}$

(D) $\binom{n}{k}\frac{21^k 4^{n-k}}{5^{2n}}$

(E) $\binom{n}{k}\frac{6^k 19^{n-k}}{5^{2n}}$

Zadanie 2.
Niech T oznacza liczbę pełnych okresów przeżytych przez pacjenta po pewnej operacji. Załóżmy, że T jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym

$P_\theta(T = t) = \theta(1-\theta)^t$, $t = 0,1,2,\dots$,

przy czym $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy losową grupę 100 niezależnych pacjentów, przy czym

- dla tych pacjentów, dla których $T \le 5$, znamy T dokładnie,
- jeżeli pacjent żyje co najmniej sześć okresów, to jego czas życia jest nieznany, zatem dla każdego z pozostałych pacjentów wiemy tylko, że $T \ge 6$.

Estymujemy θ na podstawie tych obserwacji. Wyznacz wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ wiedząc, że:

- suma okresów życia pacjentów, którzy przeżyli co najwyżej 5 pełnych okresów jest równa 120;
- liczba tych pacjentów jest równa 40.

(A) $\frac{1}{13}$

(B) $\frac{2}{23}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{10}$

(E) $\frac{1}{12}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_1, \sigma^2)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{15}$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_2, \sigma^2)$. Wszystkie zmienne są niezależne, a parametry m_1, m_2, σ są nieznane. Testujemy hipotezę $H: m_1 = m_2$ przy alternatywie $K: m_1 \neq m_2$. Hipotezę H odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S} > c,$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} Y_i$ i $S^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\left(X_i - Y_i\right)^2$.

Wyznacz c tak, aby rozmiar testu był równy 0,05.

A) 0,9063

(B) 0,5538

(C) 0,5504

(D) 0,4973

(E) 0,5474

Zadanie 4.
Skuteczność strzelca mierzymy prawdopodobieństwem trafienia w cel pojedynczym strzałem (w pewnych odpowiednio wystandaryzowanych warunkach). W pewnej populacji strzelców (załóżmy dla uproszczenia, iż jest to populacja nieskończona) rozkład skuteczności jest jednostajny na przedziale $(0,1)$.

Wybieramy przypadkowego strzelca, który oddaje 12 strzałów. Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia w kolejnej próbie nie zależy od wyniku prób poprzednich. Okazuje się, że wybrany strzelec trafił 7 razy. Prosimy go o oddanie trzynastego strzału. Prawdopodobieństwo, iż tym razem trafi jest równe

(A) $\frac{7}{14}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{8}{13}$

(D) $\frac{9}{15}$

(E) $\frac{8}{14}$

Zadanie 5.
Niech $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu \in R$, $\sigma > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$, $s^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2$. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru $\nu = \frac{\mu}{\sigma}$.

(A) $\frac{\overline{X}}{s}$

(B) $\frac{3}{\Gamma(3{,}5)}\frac{\overline{X}}{s}$

(C) $\frac{12}{\Gamma(3{,}5)}\frac{\overline{X}}{s}$

(D) $\frac{8!}{2\Gamma(7{,}5)}\frac{\overline{X}}{s}$

(E) $\frac{6}{\Gamma(3{,}5)}\frac{\overline{X}}{s}$

Zadanie 6.
Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły „jedynki". W trzeciej rundzie rzucamy tymi kostkami, na których do tej pory nie wypadły „jedynki".
Oblicz prawdopodobieństwo, że po trzech rundach na wszystkich kostkach będą „jedynki" (wybierz najbliższą wartość).

(A) 0,021

(B) 0,050

(C) 0,026

(D) 0,017

(E) 0,075

Zadanie 7.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie zadanym gęstością

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{gdy } x \in [0,1] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Wyznacz $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \mid \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczbą z przedziału $[0,1]$.

(A) $\frac{3n}{4}t$

(B) $\frac{3(n-1)}{4}t$

(C) $\frac{3n+1}{4}t$

(D) $\frac{3}{4}nt^4$

(E) $\frac{3n-1}{4}t$

Zadanie 8.
Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mają jednakową wartość oczekiwaną μ, jednakową wariancję σ^2 i współczynnik korelacji $Corr(X_i, X_j) = \rho$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i mają rozkłady postaci $P(Z_i = -1) = p = 1 - P(Z_i = 1)$. Oblicz wariancję zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$.

(A) $n\sigma^2 + 4n\mu^2 p(1-p)$

(B) $n\sigma^2(1 + (n-1)\rho(1-p)^2) + n\mu^2(1-2p)^2$

(C) $n\sigma^2(1 + (n-1)\rho(1-2p)^2) + n\mu^2(1-2p)^2$

(D) $n\sigma^2(1 + (n-1)\rho(1-2p)^2) + 4n\mu^2 p(1-p)$

(E) $n\sigma^2\left(1 + \frac{n-1}{2}\rho(1-2p)^2\right) + 4n\mu^2 p(1-p)$

Zadanie 9.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Dla parametru θ zakładamy rozkład a priori o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 9\theta e^{-3\theta} & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Estymujemy parametr θ przy funkcji straty postaci

$$L(\theta, a) = e^{(\theta - a)} - (\theta - a) - 1 .$$

Wyznacz estymator bayesowski a parametru θ, jeżeli zaobserwowano próbkę $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

(A) $(n+2)\ln\frac{3+T}{2+T}$

(B) $\frac{n+2}{3+T}$

(C) $(n+2)\ln\frac{2+T}{3+T}$

(D) $\frac{3+T}{n+2}$

(E) $(n+2)\ln\frac{3+T}{4+T}$

Wskazówka: Wartość estymatora bayesowskiego a, gdy obserwowana zmienna losowa przyjmuje wartość x, minimalizuje ryzyko a posteriori $E_\pi(L(\theta, a) \mid x)$, czyli wartość oczekiwaną funkcji $L(\theta, a)$ wyznaczoną, gdy θ ma rozkład a posteriori.

Zadanie 10.
Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu $P \in \{P_0, P_1\}$, gdzie P_0 jest rozkładem normalnym $N(0,1)$ i P_1 jest rozkładem Laplace'a o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : P = P_0$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : P = P_1.$$

Podaj rozmiar testu najmocniejszego, jeśli wiadomo, że obszar krytyczny testu jest sumą przedziałów rozłącznych, z których jeden jest równy $(-\infty, -1{,}9)$.

(A) $\alpha = 0{,}029$

(B) $\alpha = 0{,}057$

(C) $\alpha = 0{,}137$

(D) $\alpha = 0{,}010$

(E) $\alpha = 0{,}050$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2005 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	D	
4	E	
5	B	
6	E	
7	C	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.