Zadanie 1.

Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_9$ ma rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_1 i wariancją 1, a każda ze zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_9$ rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_2 i wariancją 4. Założono, że wszystkie zmienne losowe są niezależne i wyznaczono, przy tych założeniach, test oparty na ilorazie wiarogodności dla testowania hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ przy alternatywie $H_1 : m_1 \neq m_2$ na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości założenie to nie jest spełnione:

- co prawda pary zmiennych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne, ale
- X_i, Y_i są zależne i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \frac{1}{2}$ dla $i = 1,2,\ldots,9$.

Oblicz faktyczne prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju α i moc testu β przy alternatywie $m_1 = m_2 + 2$.

(A) $\alpha = 0{,}01;\ \beta = 0{,}82$

(B) $\alpha = 0{,}03;\ \beta = 0{,}79$

(C) $\alpha = 0{,}01;\ \beta = 0{,}73$

(D) $\alpha = 0{,}03;\ \beta = 0{,}82$

(E) $\alpha = 0{,}10;\ \beta = 0{,}73$

Zadanie 2.
Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy 10 elementową próbkę, w której $x_1 = x_2 = \ldots = x_5 = 1$ i $x_6 = x_7 = \ldots = x_{10} = 4$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = \sigma^2$, gdy $i = 1,2,\ldots,5$, i $Var\varepsilon_i = 9\sigma^2$, gdy $i = 6,7,\ldots,10$. Wyznaczono estymatory $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ parametrów β_0 i β_1 wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując sumę $\sum_{i=1}^{10} \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{Var\varepsilon_i}$.
Wyznacz stałe z_0 i z_1 tak, aby $P\left(|\hat{\beta}_0 - \beta_0| < z_0\sigma\right) = 0{,}95$ i $P\left(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < z_1\sigma\right) = 0{,}95$.
Spośród podanych odpowiedzi wybierz odpowiedź będącą najlepszym przybliżeniem.

(A) $z_0 = 1{,}20$ i $z_1 = 0{,}77$

(B) $z_0 = 1{,}20$ i $z_1 = 0{,}92$

(C) $z_0 = 1{,}46$ i $z_1 = 0{,}92$

(D) $z_0 = 1{,}20$ i $z_1 = 0{,}41$

(E) $z_0 = 1{,}75$ i $z_1 = 1{,}84$

Zadanie 3.
Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4} & \text{gdy } x\geq 1 \text{ i } y\in[1;2]\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Niech $S = XY$. Wtedy

(A) zmienne losowe S i X są niezależne

(B) $E(S \mid X) = 1{,}5$

(C) zmienna losowa X przy $S = 3$ ma rozkład o gęstości

$$g(x \mid S=3)=\begin{cases}\dfrac{108}{5x^5} & \text{gdy } x\in[1{,}5;3]\\ 0 & \text{gdy } x\notin[1{,}5;3]\end{cases}$$

(D) $E(X \mid S = 3) = 2$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej S, dla $s > 2$, wyraża się wzorem $g_S(s) = \dfrac{45}{s^4}$

Zadanie 4.
Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest ustaloną liczbą. Niech $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. Obliczyć

$$P\left(X_1 > \frac{S}{2} \vee X_2 > \frac{S}{2} \vee \ldots \vee X_{10} > \frac{S}{2} \right)$$

(A) $\frac{1}{512}$

(B) $\frac{5}{512}$

(C) $\frac{5}{256}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) żadna z odpowiedzi podanych wyżej

Zadanie 5.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają identyczny rozkład dany gęstością $f_\theta(x) = \begin{cases} 4\theta x^3 \exp(-\theta x^4) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech T_n oznacza estymator największej wiarogodności funkcji $g(\theta) = P_\theta(X_1 > 1) = e^{-\theta}$ wyznaczony w oparciu o próbę losową $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Przypuśćmy, że $\theta = 2$. Które z twierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-2}|\sqrt{n} > e^{-1}\} = 0{,}32$

(B) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-2}|\sqrt{n} > 2e^{-2}\} = 0{,}32$

(C) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n \le e^{-2}\} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - 2|\sqrt{n} < 2\} = 0{,}32$

(E) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n > e^{-2}\} = 1$

Zadanie 6.
Niech $(U_1,\ldots,U_n)$ będzie próbą niezależnych zmiennych losowych z rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$, a więc niech łączna gęstość próby wynosi:

$$f(u_1,\ldots,u_n) = 1 \text{ dla każdego } (u_1,\ldots,u_n) \in (0,1)^n .$$

Załóżmy, że $n > 1$. Niech $(Y_1,\ldots,Y_n)$ oznacza próbę $(U_1,\ldots,U_n)$ uporządkowaną w kolejności rosnącej. Oznaczmy gęstość próby uporządkowanej przez $g(y_1,\ldots,y_n)$. Oczywiście gęstość ta przyjmuje wartości dodatnie na zbiorze:

$$(y_1,\ldots,y_n):\quad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < 1$$

Gęstość g jest na tym zbiorze stała i wynosi:

(A) $g(y_1,\ldots,y_n) = 2^n - n$

(B) $g(y_1,\ldots,y_n) = 2^{n-1}$

(C) $g(y_1,\ldots,y_n) = (n+1)! - n$

(D) $g(y_1,\ldots,y_n) = n^2 - 2n + 2$

(E) $g(y_1,\ldots,y_n) = n!$

Zadanie 7.

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2,...$ na przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ dla $i, j = 1,2,3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}\right],$$

(gdzie $\pi_i = \Pr(X_1 = i)$ dla $i = 1,2,3$).

Oblicz $p = \Pr(X_3 = 1 \mid X_2 \neq 1 \wedge X_1 \neq 1)$.

(A) $p = \frac{1}{7}$

(B) $p = \frac{1}{8}$

(C) $p = \frac{1}{4}$

(D) $p = \frac{1}{9}$

(E) $p = \frac{1}{12}$

Zadanie 8.
Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Niech X_4 oznacza liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach, a X_{12} liczbę orłów we wszystkich dwunastu rzutach. Oblicz

$$EVar(X_4 \mid X_{12})$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 9.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2\theta^2}{x^3} & \text{gdy } x \ge \theta \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Dla parametru θ zakładamy rozkład a priori o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\theta & \text{gdy } \theta \in (0,2) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wyznacz wartość estymatora bayesowskiego parametru θ przy kwadratowej funkcji straty, jeżeli zaobserwowano próbkę spełniającą warunek

$$\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1.$$

(A) $\dfrac{2n+2}{2n+3}$

(B) $\dfrac{2(2n+2)}{2n+3}$

(C) $\dfrac{2n+1}{2n+2}$

(D) $\dfrac{2n+2}{2(2n+3)}$

(E) 1

Zadanie 10.
Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu Laplace'a o gęstości

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|},$$

gdzie $\lambda > 0$ i $\mu \in R$ są parametrami.
Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = 0 \quad i \quad \lambda = 1$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu = -1 \quad i \quad \lambda = 0,5.$$

Obszar krytyczny najmocniejszego testu na poziomie istotności α jest postaci

$$K = \{x : x \notin (a,3)\}.$$

Wyznacz a i poziom istotności α.

(A) $a = -\infty$; $\alpha = 0,025$

(B) $a = -2$; $\alpha = 0,093$

(C) $a = -1$; $\alpha = 0,209$

(D) $a = -3$; $\alpha = 0,050$

(E) $a = -4$; $\alpha = 0,034$

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 października 2005 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	C	
4	C	
5	B	
6	E	
7	B	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.