Zadanie 1.

Niech $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z następującymi parametrami: nieznaną wartością oczekiwaną $EX_i = EY_i = m$, wariancją $VarX_i = \frac{1}{4}VarY_i = 1$ i współczynnikiem korelacji $Corr(X_i,Y_i) = \frac{1}{2}$. Osobno na podstawie prób losowych $X_1,X_2,\ldots,X_n$ i $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ zbudowano dwa przedziały ufności dla wartości oczekiwanej *m*, każdy na poziomie ufności 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo, że tak zbudowane przedziały okażą się rozłączne.

(A) 0,15

(B) 0,05

(C) 0,03

(D) 0,12

(E) 0,08

Zadanie 2.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy 20 elementową próbkę, w której $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$ i $x_{11} = x_{12} = \ldots = x_{20} = 3$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = \sigma^2$, gdy $i = 1,2,\ldots,10$, i $Var\varepsilon_i = 4\sigma^2$, gdy $i = 11,12,\ldots,20$. Wyznaczono estymatory $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ parametrów β_0 i β_1 wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów, czyli minimalizując wielkość $\sum_{i=1}^{20} \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2$. Wyznacz stałe z_0 i z_1 tak, aby $P\left(|\hat{\beta}_0 - \beta_0| < z_0 \sigma\right) = 0{,}95$ i $P\left(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < z_1 \sigma\right) = 0{,}95$. Spośród podanych odpowiedzi wybierz odpowiedź będącą najlepszym przybliżeniem.

(A) $z_0 = 0{,}98$ i $z_1 = 0{,}69$

(B) $z_0 = 0{,}93$ i $z_1 = 0{,}69$

(C) $z_0 = 0{,}93$ i $z_1 = 0{,}54$

(D) $z_0 = 1{,}18$ i $z_1 = 0{,}69$

(E) $z_0 = 1{,}18$ i $z_1 = 0{,}54$

Zadanie 3.

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & \text{gdy } x>0 \text{ i } y>0 \text{ i } x+y<1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $S = X+Y$ i $V = Y-X$. Wyznacz $Var\left(V \mid S = \frac{1}{2}\right)$

(A) $\frac{1}{18}$

(B) $\frac{1}{24}$

(C) $\frac{1}{48}$

(D) $\frac{1}{12}$

(E) $\frac{1}{16}$

Zadanie 4.

Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi spełniającymi warunki
$P(C-B)>0$ i $P(B-C)>0$ i $P(B\cap C)>0$ i $P(A\mid C-B)>P(A\mid B)$. Wtedy

(A) $P(A\mid B\cup C)<P(A\mid C)$

(B) $P(A\mid B\cap C)<P(A\mid B)$

(C) $P(A\mid B-C)>P(A\mid C-B)$

(D) $P(A\mid B\cup C)>P(A\mid B)$

(E) żadna z podanych wyżej nierówności nie jest prawdziwa

Zadanie 5.

Obserwujemy n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o tym samym rozkładzie o gęstości $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{gdy } x \in (0;\theta) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 1$ na poziomie istotności $0{,}1$. Jak najmniej liczną próbą należy dysponować, aby moc otrzymanego testu przy alternatywie $\theta_1 = \frac{3}{2}$ była nie mniejsza niż 0,9.

(A) $n \geq 10$

(B) $n = 8$

(C) $n = 6$

(D) $n = 4$

(E) $n = 3$

Zadanie 6.

Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy pierwotnych zmiennych X_1 i X_2. Wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2 zmiennej $|X_1 - X_2|$ wynoszą:

(A) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{36}$

(B) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

(C) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{24}$

(D) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

(E) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{6}$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 3. Niech N będzie zmienną losową niezależna od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 2. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} iX_i & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $VarZ_N$.

(A) 9

(B) $9{,}75 - 0{,}75e^{-2}$

(C) $6{,}75 + 0{,}75e^{-2}$

(D) $14{,}25 - 0{,}75e^{-2}$

(E) $5{,}25 + 1{,}5e^{-2}$

Wskazówka: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x^{2\theta-1} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wszystkie zmienne losowe są niezależne. Dobierz stałą a tak, aby

$$P_\theta\left(\frac{T}{\theta} > a\right) = 0,9$$

wiedząc, że T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ otrzymanym na podstawie zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{10}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$.

(A) 1,377

(B) 0,772

(C) 1,408

(D) 0,704

(E) 0,626

Zadanie 9.

Wykonujemy n niezależnych doświadczeń, z których każde może się zakończyć jednym z czterech wyników: A_1, A_2, A_3, A_4. Niech N_i oznacza liczbę doświadczeń, w których uzyskano wynik A_i, a p_i prawdopodobieństwo uzyskania wyniku A_i w pojedynczym doświadczeniu, gdzie $i = 1,2,3,4$. Wiadomo, że $p_1 = \frac{1}{15}$ i $p_2 = \frac{4}{15}$. Jaka jest wartość p_3, jeżeli zmienne losowe $N_1 + N_2$ i $N_2 + N_3 - N_4$ są nieskorelowane.

(A) $\frac{45}{75}$

(B) $\frac{1}{75}$

(C) $\frac{31}{75}$

(D) $\frac{30}{75}$

(E) nie istnieje p_3 spełniające warunki zadania

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m, \sigma^2)$, z nieznanymi parametrami m i σ^2. Rozważamy problem testowania hipotezy $H_0 : m = 0$ przy alternatywie $H_1 : m \neq 0$ za pomocą testu, który odrzuca H_0 jeśli $\frac{|\overline{X}|}{Z} > t$, gdzie $Z = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$. Dobierz stałą t tak, aby prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju testu było równe 0,05, jeśli wiadomo, że $n = 9$.

(A) 0,769

(B) 0,569

(C) 0,754

(D) 0,399

(E) 0,632

Egzamin dla Aktuariuszy z 16 maja 2005 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	A	
4	D	
5	E	
6	D	
7	B	
8	B	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.