Zadanie 1.
Wykonujemy rzuty symetryczną kością do gry do chwili uzyskania drugiej „szóstki”. Niech Y oznacza zmienną losową równą liczbie rzutów, w których uzyskaliśmy inne wyniki niż „szóstka”, a X zmienną losową równą liczbie rzutów, w których uzyskaliśmy „jedynkę”. Oblicz $E(Y - X \mid X = 4)$.

(A) 12

(B) 14

(C) 16

(D) 18

(E) 20

Zadanie 2.
Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X_1 ma rozkład Pareto(1,1) a X_2, X_3, X_4 mają jednakowy rozkład Pareto (1,2). Oblicz

$$P(\min(X_2, X_3, X_4) < X_1 < \max(X_2, X_3, X_4)).$$

Rozkład Pareto (λ, θ) jest rozkładem o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\theta \theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0. \end{cases}$$

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{5}$

Zadanie 3.

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{\pi} & \text{gdy } x>0 \text{ i } y>0 \text{ i } x^2+y^2<1\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Niech $Z=\frac{Y}{X}$ i $V=X^2+Y^2$. Wtedy łączny rozkład zmiennych *Z, V* jest taki, że

(A) $EZ=1$

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej *Z* wyraża się wzorem
$g(z)=\frac{2}{\pi(1+z^2)}$ dla $z\in(0,+\infty)$

(C) mediana rozkładu brzegowego zmiennej *Z* jest równa $\sqrt{3}$

(D) zmienne *Z* i *V* są zależne

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej *V* wyraża się wzorem
$g_V(v)=4v^3$ dla $v\in(0,1)$

Zadanie 4.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_m$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu_1, \sigma^2)$ każda i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu_2, \sigma^2)$ każda. Wszystkie zmienne są niezależne. Hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ weryfikujemy w następujący sposób. Zliczamy liczbę S elementów w próbce $X_1, X_2, \ldots, X_m$ większych od wszystkich elementów próbki $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Hipotezę H_0 odrzucamy, gdy $S \geq s$, gdzie s jest wartością krytyczną. Przypuśćmy, że m=7 i n=8. Podaj rozmiar testu, gdy s=2.

(A) 0,15

(B) 0,10

(C) 0,20

(D) 0,05

(E) 0,25

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy} \quad x \in (0;1) \\ 0 & \text{gdy} \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Niech $T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\frac{1}{n}}$.

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - e^{-0,5})\sqrt{n} > 2e^{-0,5}\} = 0,023$

(B) $\lim_{n\to\infty} P\{| T_n - e^{0,5} | \sqrt{n} > 2e^{0,5}\} = 0,023$

(C) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n < e^{-0,5}\} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} P\{| T_n - e^{-0,5} | \sqrt{n} > e^{-0,5}\} = 0,046$

(E) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n > e^{0,5}\} = 1$

Zadanie 6.
Ustawiamy w ciąg 6 elementów typu a i 9 elementów typu b. Wszystkie ciągi są jednakowo prawdopodobne. Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu a i 2 serie elementów typu b). Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu będzie 6 serii.

(A) $\frac{8}{143}$

(B) $\frac{96}{143}$

(C) $\frac{16}{143}$

(D) $\frac{48}{143}$

(E) $\frac{24}{143}$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienne losowe X_i $i = 1,2,\ldots m$ mają rozkład Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

a X_i, $i = m+1, m+2, \ldots, m+n$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$g_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\sqrt{x}} e^{-2\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Jeśli $m = n = 5$, to błąd średniokwadratowy estymatora największej wiarogodności wyznaczonego na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n}$ jest równy

(A) $\frac{2}{3}\theta^2$

(B) $\frac{1}{3}\theta^2$

(C) θ^2

(D) $\frac{1}{9}\theta^2$

(E) $\frac{1}{6}\theta^2$

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto$(1, a_1)$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ będą zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto$(1, a_2)$, gdzie $a_1, a_2 > 0$ są nieznanymi parametrami. Wszystkie zmienne są niezależne. Na poziomie ufności $1-\alpha$ budujemy przedział ufności $[dT, cT]$ dla ilorazu parametrów $\frac{a_1}{a_2}$ na podstawie estymatora największej wiarogodności T tego ilorazu w ten sposób, że

$$P_{a_1,a_2}\left(cT < \frac{a_1}{a_2}\right) = P_{a_1,a_2}\left(dT > \frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Jeśli $\alpha = 0{,}1$ i m=4 i n=5, to przedział ufności ma długość

(A) 3,02T

(B) 2,77T

(C) 6,06T

(D) 5,03T

(E) 4,42T

Uwaga: Rozkład Pareto(λ, θ) jest rozkładem o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\theta \theta}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Zadanie 9.
Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mają jednakową wartość oczekiwaną μ, jednakową wariancję σ^2 i współczynnik korelacji $Corr(X_i, X_j) = \rho$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i mają rozkłady postaci $P(Z_i = 0) = P(Z_i = 1) = \frac{1}{2}$. Oblicz wariancję zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$.

(A) $n\frac{\sigma^2}{2} + \frac{n(n-1)}{4}(\rho\sigma^2 - \mu^2)$

(B) $n\frac{\mu^2}{4} + n\frac{\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{n-1}{4}\rho\right)$

(C) $n\frac{\mu^2 + 2\sigma^2}{4}$

(D) $n\frac{\mu^2}{4} + n\frac{\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{n-1}{2}\rho\right)$

(E) $n\frac{\sigma^2}{2} + \frac{n(n-1)}{4}(\rho\sigma^2 + \mu^2)$

Zadanie 10.
Niech $N, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_i,\ i = 1,2,\ldots$ mają rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej 1, zmienne losowe $Y_i,\ i = 1,2,\ldots$ mają rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej 2. Warunkowy rozkład zmiennej losowej N przy danym $\Lambda = \lambda$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej λ. Rozkład brzegowy zmiennej Λ jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} 16\lambda e^{-4\lambda} & \text{gdy } \lambda > 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda \le 0 \end{cases}.$$

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Oblicz współczynnik korelacji $Corr(S,T)$.

(A) 0

(B) $\frac{2}{15}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{5}{9}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 stycznia 2005 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	A	
3	B	
4	C	
5	D	
6	C	
7	E	
8	A	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.