Zadanie 1.

W kolejnych okresach czasu $t = 1, 2, 3, ...$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ, generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne $N_1, N_2, N_3, ...$ są warunkowo niezależne i mają (brzegowe) rozkłady Poissona:

$$\Pr\left(N_t = k \middle| \Lambda = \lambda\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad t = 1, 2, 3, ..., \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametr ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda).$$

Jeśli parametry zadania wynoszą: $\alpha = 2$, $\beta = 10$,

to iloraz warunkowych wartości oczekiwanych:

$$\frac{\mathrm{E}\left(N_6 \middle| N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 > 0\right)}{\mathrm{E}\left(N_6 \middle| N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 0\right)}$$

wynosi:

(A) 1.9

(B) 1.8

(C) 1.7

(D) 1.6

(E) 1.5

Zadanie 2.
Mamy niepełną informację o rozkładzie zmiennej losowej X. Wiemy mianowicie, że przyjmuje ona wartości nieujemne oraz że dla dowolnego $d \in [2,10]$ wartość oczekiwana nadwyżki tej zmiennej ponad d wynosi:

$$\mathrm{E}\left[(X-d)_+\right] = \frac{(10-d)^2}{20}.$$

Zbiór wszystkich dopuszczalnych (w świetle posiadanej informacji) wartości dla $\mathrm{E}(X)$ to przedział:

(A) $[4.9, \quad 5.2]$

(B) $[4.8, \quad 5.2]$

(C) $[4.9, \quad 5.3]$

(D) $[4.8, \quad 5.3]$

(E) $[4.7, \quad 5.3]$

Zadanie 3.
Mamy dwie zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$,
- X - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 2)$.

Przyjmujemy oczywiście, że jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej *T*, jak i dla zmiennej *X*) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz X są niezależne.

Oczekiwany czas likwidacji szkody, do której doszło w ciągu tego roku, ale która przed końcem roku nie została zlikwidowana, a więc:

$$E(X|T + X > 1)$$

wynosi:

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{11}{9}$

(D) $\frac{6}{5}$

(E) $\frac{11}{10}$

Zadanie 4.

Dwa nieobciążone predyktory P_1 i P_2 parametru ryzyka Θ mają błędy predykcji o wariancjach odpowiednio 9 i 4, a współczynnik korelacji liniowej tych błędów wynosi 1/2. Wariancja błędu predykcji w klasie predyktorów $P_3(z)$ zdefiniowanych następująco:

$$P_3(z) = zP_1 + (1-z)P_2, \qquad z \in [0,1],$$

osiąga wartość najmniejszą, gdy współczynnik z jest równy:

(A) $\frac{4}{13}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{7}$

(E) $\frac{3}{11}$

Zadanie 5.

Proces nadwyżki jest złożonym procesem Poissona, w którym θ to stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto, zaś Y to zmienna losowa wyrażająca wartość pojedynczej szkody. Niech L_1 będzie wartością, o którą nadwyżka spada po raz pierwszy poniżej poziomu wyjściowego (o ile do takiego spadku dochodzi), zaś L niech oznacza maksymalną całkowitą stratę (nadwyżka początkowa minus najniższy punkt trajektorii procesu).

Jeśli Y ma rozkład jednostajny na przedziale (0, 1), to funkcja $M_L(r)$ generująca momenty zmiennej L dana jest wzorem:

(A) $\dfrac{2r^2\theta}{r^2(1+\theta)-(e^r-1)}$

(B) $\dfrac{r^2\theta}{r^2(1+\theta)-2(e^r-1)}$

(C) $\dfrac{2r^2\theta}{r^2(1+\theta)-(e^r-r)}$

(D) $\dfrac{r^2\theta}{r^2(1+\theta)-(e^r-1-r)}$

(E) $\dfrac{r^2\theta}{r^2(1+\theta)-2(e^r-1-r)}$

Zadanie 6.

Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę 3 i wypłaca odszkodowania za rok n-ty w wysokości W_n. Zmienne losowe W_n są niezależne i mają jednakowy rozkład:

$$\Pr(W_n = 1) = 0.4,$$
$$\Pr(W_n = 3) = 0.4,$$
$$\Pr(W_n = 5) = 0.2.$$

Współczynnik dostosowania R (*adjustment coefficient*) wynosi:

(A) $\frac{1}{4}\ln 2$

(B) $\frac{1}{2}\ln 2$

(C) ln2

(D) 2ln2

(E) 1

Zadanie 7.
Niech przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ łączna wartość szkód w portfelu liczącym n ryzyk:
$W(n) = Y_1 + \ldots + Y_{N(n)}$,
ma złożony rozkład Poissona o częstotliwości równej $n\lambda$ i rozkładzie pojedynczego składnika o parametrach:
$E(Y) = \mu$, $\quad VAR(Y) = c\mu^2$.
Parametr λ rozkładu ilości szkód $N(n)$ pochodzi z rozkładu zmiennej losowej Λ, o którym wiemy, że:
$E(\Lambda) = \overline{\Lambda}$, $\quad VAR(\Lambda) = L^2$.

Przyjmij założenia liczbowe:
$\mu = 10$, $\quad c = 2$, $\quad \overline{\Lambda} = 1/10$ $\quad VAR(\Lambda) = L^2 = 1/2500$

Oblicz granicę (przy nieograniczenie rosnących rozmiarach portfela) kwadratu współczynnika zmienności zmiennej $W(n)$, tzn.:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{VAR(W(n))}{[E(W(n))]^2}.$$

(A) 0

(B) 1/250

(C) 3/250

(D) 1/25

(E) 3/25

Zadanie 8.

X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0,1,2,...\}$. Wartości dystrybuanty $F_1(x) = \Pr(X_1 \le x)$ oraz $F_S(x) = \Pr(X_1 + X_2 \le x)$ dla $x = 0,1,2,3,4$ podane są w tabeli:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.4	0.12
1	0.6	0.30
2	0.8	0.50
3	0.9	0.67
4	1	0.83

$\Pr(X_2 = 2)$ wynosi:

(A) 0

(B) 0.1

(C) 0.2

(D) 0.3

(E) 0.4

Zadanie 9.
O pewnym ryzyku wiemy, iż generuje ono szkody zgodnie z procesem Poissona (λt). W momencie t_0 wiemy o parametrze λ, iż jest realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie (a priori) Gamma o wartości oczekiwanej 5 i wariancji $2\frac{1}{2}$. Uwzględniwszy informację, iż od momentu t_0 czekaliśmy na pierwszych dziesięć szkód do momentu $t_{10} = t_0 + 3$, możemy wyliczyć wartość oczekiwaną (a posteriori) zmiennej Λ. Wynosi ona:

(A) 15/4

(B) 7/2

(C) 10/3

(D) 19/5

(E) 4

Zadanie 10.

Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$, w miesiącu $t + k$ z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (bez względu na to, jaki był moment kalendarzowy zajścia tej szkody, i jakie momenty kalendarzowe i czasy likwidacji miały inne szkody).

Niech:

- R_t oznacza liczbę szkód nie zlikwidowanych na koniec miesiąca t (spośród tych, które zaszły w miesiącu t oraz miesiącach poprzednich)
- n_t oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu miesiąca t.

Przy założeniu, że:

- $R_{t-1} = 270$
- $n_t = 120$
- $n_{t+1} = 140$

wartość oczekiwana R_{t+1} (warunkowa, przy wyżej wymienionych warunkach) wynosi:

(A) 306

(B) 310

(C) 312

(D) 315

(E) 318

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 stycznia 2005 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwi~~sko .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	C	
4	D	
5	E	
6	B	
7	D	
8	C	
9	E	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.