Zadanie 1. Obserwujemy działanie pewnego urządzenia w kolejnych chwilach $t = 0,1,2,\ldots.$. Działanie tego urządzenia zależy od pracy dwóch podzespołów A i B. Każdy z nich może ulec awarii w jednostce czasu z prawdopodobieństwem 0,1 niezależnie od drugiego. Jeżeli jeden z podzespołów ulega awarii, to urządzenie nie jest naprawiane i działa dalej wykorzystując drugi podzespół. Jeżeli oba podzespoły są niesprawne w chwili t, to następuje ich naprawa i w chwili $t+1$ oba są sprawne. Prawdopodobieństwo, że podzespół B jest sprawny w chwili t dąży, przy t dążącym do nieskończoności, do następującej liczby (z dokładnością do 0,001):

(A) 0,635

(B) 0,655

(C) 0,345

(D) 0,474

(E) 0,602.

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest ustalonym parametrem.

Niech N będzie zmienną losową, niezależną od $X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$, o rozkładzie ujemnym dwumianowym $P(N = n) = \binom{n+r-1}{n} p^r (1-p)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$, gdzie $r>0$ i $p \in (0;1)$ są ustalonymi parametrami. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, X_2, \ldots, X_N) & gdy \;\; N > 0 \\ 0 & gdy \;\; N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(NZ_N)$ i $Var(NZ_N)$.

(A) $E(NZ_N) = \dfrac{1}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \dfrac{1}{\alpha^2}$

(B) $E(NZ_N) = \dfrac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \dfrac{1-p^r}{\alpha^2}$

(C) $E(NZ_N) = \dfrac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \dfrac{1-p^{2r}}{\alpha^2}$

(D) $E(NZ_N) = \dfrac{r(1-p)}{p\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \dfrac{r(1-p)}{p^2\alpha^2}$

(E) $E(NZ_N) = \dfrac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \dfrac{1-p^{2r}}{\alpha}$.

Zadanie 3. Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } x>0 \text{ i } y\in(0;1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wtedy łączny rozkład zmiennych *Z, X* jest taki, że

(A) zmienne *Z* i *X* są niezależne;

(B) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z,x):\ 0<x<z<2\}$ wyraża się wzorem $g(z,x)=\frac{1}{4}e^{-x}$;

(C) $E(Z \mid X=2)=4$;

(D) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z,x):\ 0<x<z<2+x\}$ wyraża się wzorem $g(z,x)=\frac{1}{2}e^{-x}$;

(E) jego funkcja gęstości na zbiorze $\{(z,x):\ 0<x<z<1+x\}$ wyraża się wzorem $g(z,x)=e^{-x}$.

Zadanie 4. Dysponujemy $N+1$ (N>1) identycznymi urnami. Każda z nich zawiera N kul białych i czarnych. Liczba kul białych w $i-$tej urnie jest równa $i-1$, gdzie $i=1,2,....,N+1$.

Losujemy urnę, a następnie ciągniemy z niej jedną kulę i okazuje się, że otrzymana kula jest biała. Oblicz prawdopodobieństwo, że ciągnąc drugą kulę z tej samej urny (bez zwracania pierwszej) również otrzymamy kulę białą.

(A) $\dfrac{N-1}{2(N+1)}$

(B) $\dfrac{N}{2(N+1)}$

(C) $\dfrac{N-1}{N+1}$

(D) $\dfrac{2}{3}$

(E) $\dfrac{1}{2}$.

Wskazówka: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(N-1)N=\dfrac{(N-1)N(N+1)}{3}$.

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy nieobciążony estymator parametru θ postaci $T_n = aY$, gdzie $Y = \min(X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2)$ i a jest odpowiednio dobraną stałą (być może zależną od liczebności próby n).
Badając zgodność estymatora T_n otrzymujemy

(A) $\forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$;

(B) $\forall \theta > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < \theta \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - \exp(-1)\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right)$;

(C) $\forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - \exp(-1)\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right)$;

(D) $\forall \theta > 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < \theta \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$;

(E) $\forall \theta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1$.

Zadanie 6. Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną i znaną wariancją σ^2. Założono, że zmienne są niezależne i wyznaczono (przy tych założeniach) test jednostajnie najmocniejszy dla testowania hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ przy alternatywie $H_1 : \mu > \mu_0$ na poziomie istotności 0,05.
W rzeczywistości zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ mają łączny rozkład normalny, ale są skorelowane i współczynnik korelacji $Corr(X_i, X_j) = \frac{1}{10}$ dla wszystkich $i \neq j$. Oblicz faktyczny błąd pierwszego rodzaju testu z dokładnością do 0,01.

(A) 0,75

(B) 0,25

(C) 0,31

(D) 0,69

(E) 0,48

Zadanie 7. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa X_i ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej m i wariancji im^2, i=1,2,3,4, gdzie $m \neq 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymatory parametru m postaci

$$\hat{m} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 .$$

Znaleźć współczynniki $a_i, i = 1,2,3,4$, dla których estymator ma najmniejszy błąd średniokwadratowy , czyli współczynniki minimalizujące funkcję $E_m (\hat{m} - m)^2$

(A) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$

(B) $a_1 = \frac{12}{25},\ a_2 = \frac{6}{25},\ a_3 = \frac{4}{25},\ a_4 = \frac{3}{25}$

(C) $a_1 = \frac{4}{10},\ a_2 = \frac{3}{10},\ a_3 = \frac{2}{10},\ a_4 = \frac{1}{10}$

(D) $a_1 = \frac{4}{12},\ a_2 = \frac{3}{12},\ a_3 = \frac{2}{12},\ a_4 = \frac{1}{12}$

(E) $a_1 = \frac{12}{37},\ a_2 = \frac{6}{37},\ a_3 = \frac{4}{37},\ a_4 = \frac{3}{37}$

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 0,5 i niech N będzie zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą 3.
Niech

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } X_i \le d \\ X_i - d & \text{gdy } X_i > d, \end{cases}$$

gdzie d jest ustaloną liczbą dodatnią. Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty zmiennej $Z = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ w punkcie 1, a więc $E(e^Z)$.

(A) $e^{3(2e^{-2d}-1)}$

(B) $e^{3e^{-2d}}$

(C) e^3

(D) $(1+e^{-2d})^3$

(E) $8e^{-6d}$.

Zadanie 9. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają jednakową wariancję σ^2. Niech $U = 3X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ i $V = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + 2X_n$. Wyznaczyć współczynnik korelacji między U i V.

(A) $\dfrac{1}{n+8}$

(B) $\sqrt{\dfrac{n+3}{n+8}}$

(C) $\dfrac{n+3}{\sqrt{(n+2)(n+1)}}$

(D) $\dfrac{n+3}{n+8}$

(E) $\dfrac{n+3}{(n+2)(n+1)}$.

Zadanie 10. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będzie próbą z rozkładu jednostajnego o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{gdy } x \in (0;\theta) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zakładamy, że nieznany parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie z funkcją gęstości daną wzorem

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{3}\theta^4 e^{-2\theta} & gdy\ \theta > 0 \\ 0 & gdy\ \theta \le 0. \end{cases}$$

Hipotezę $H_0 : \theta \le 3$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 3$ odrzucamy dla tych wartości (x_1, x_2, x_3, x_4), dla których prawdopodobieństwo a posteriori zbioru $\{\theta : \theta > 3\}$ jest większe niż $\frac{1}{2}$. Niech $x_{4:4} = \max(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Obszar krytyczny jest zbiorem postaci

(A) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_{4:4} > 3\}$

(B) $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_{4:4} > 3\sqrt[4]{0{,}95}\}$

(C) $K = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_{4:4} > 3 - \frac{\ln 2}{2}\right\}$

(D) $K = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_{4:4} < \frac{3}{\sqrt[4]{2}}\right\}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2004 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	D	
4	D	
5	B	
6	C	
7	E	
8	B	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.