Zadanie 1.
Ubezpieczyciel rozważa po jakiej składce zaoferować swoje usługi, mając na uwadze iż liczba ryzyk, które podejmą jego ofertę, jest malejącą funkcją składki za jedno ryzyko. Ustalono, że funkcję tę (zależność popytu od ceny) dobrze przybliża funkcja liniowa postaci:

- $n = 28000 - 25000\dfrac{P}{\mu}$,

gdzie P to składka za jednostkę ryzyka, μ to oczekiwana wartość szkód z ryzyka, a n to liczba jednostek ryzyka.
Zakładamy, że dla $n > 250$ rozkład łącznej wartości szkód możemy wystarczająco dokładnie przybliżyć rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej $n\mu$ i skończonej wariancji równej $n\sigma^2$. Oznaczmy przez $Z(n)$ zysk techniczny (łączną wartość zebranej składki minus łączną wartość szkód z portfela).

Niech n_0 oznacza taką liczbę ryzyk, która (przy odpowiadającej jej składce) maksymalizuje prawdopodobieństwo iż zysk techniczny będzie dodatni:

- $\forall n \geq 250 \quad \Pr(Z(n) > 0) \leq \Pr(Z(n_0) > 0)$

n_0 wynosi:

(A) 500

(B) 750

(C) 1000

(D) 1250

(E) 1500

Zadanie 2.

Łączna wartość szkód W ma złożony rozkład Poissona z parametrem częstotliwości szkód $\lambda = 100\sqrt{10}$ i rozkładem wartości pojedynczej szkody logarytmiczno-normalnym. Wiemy, że współczynnik zmienności (iloraz odchylenia standardowego i wartości oczekiwanej) zmiennej W wynosi:

- $V_W = 1/10$.

Wobec tego współczynnik skośności γ_W zmiennej W wynosi:

(A) $\gamma_W = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(B) $\gamma_W = \frac{1}{10}$

(C) $\gamma_W = \frac{1}{10\sqrt{10}}$

(D) $\gamma_W = \frac{1}{100}$

(E) za mało danych, aby wyznaczyć wartość współczynnika skośności

Zadanie 3.
W pewnym ubezpieczeniu z każdego wypłaconego odszkodowania (w kwocie Y) odzyskujemy w formie regresu kwotę RY, gdzie:

- $\Pr(R=0)=\Pr(R=1)=1/2$

Niech $\Pi(i)$ oznacza składkę netto, tzn. oczekiwaną wartość obecną wypłat zredukowanych o przychody z regresów, przy założeniu, że efektywna roczna stopa procentowa wynosi i.
Niech T_1 oznacza czas w latach, jaki upływa od momentu zainkasowania składki do momentu wypłaty odszkodowania (o ile do szkody dojdzie). Niech T_2 oznacza czas, jaki upływa od momentu wypłaty odszkodowania do momentu zainkasowania należności regresowej (o ile doszło do szkody, i o ile nastąpi ściągnięcie regresu).

Zakładamy, że o ile do szkody dojdzie, to zmienne Y, T_1 oraz R są nawzajem niezależne, a jeśli dodatkowo zajdzie zdarzenie $R=1$, to wtedy także zmienna T_2 jest niezależna od zmiennych Y oraz T_1.

Załóżmy, że T_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2, zaś T_2 rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Stosunek składki netto przy stopie $i=\exp(1/4)-1$ do składki netto obliczonej bez dyskontowania:

- $\dfrac{\Pi(\exp(1/4)-1)}{\Pi(0)}$

wynosi:

(A) 0.61

(B) 0.66

(C) 0.74

(D) 0.80

(E) 0.88

Zadanie 4.

Oznaczmy przez X_t łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, przez $X_{t,0}$ tę jej część, która dotyczy szkód zlikwidowanych przed końcem roku *t*, zaś przez $X_{t,1}$ część pozostałą. Warunkowe momenty tych zmiennych (przy danej wartości parametru ryzyka μ_t) spełniają założenia:

- $E(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p$
- $E(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t (1-p)$
- $Var(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p b^2$
- $Var(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t (1-p) b^2$
- $Cov(X_{t,0}, X_{t,1}|\mu_t) = 0$,

zaś rozkład parametru ryzyka μ_t spełnia założenia:

- $E(\mu_t) = \mu$
- $Var(\mu_t) = a^2$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor zmiennej $X_{t,1}$ oparty na informacji o zmiennej $X_{t,0}$ oraz znanych wartościach parametrów (p, b^2, μ, a^2) jest postaci:

- $BLUP(X_{t,1}|X_{t,0}) = (1-p)\left[z\dfrac{X_{t,0}}{p} + (1-z)\mu\right]$

Współczynnik *z* występujący w powyższym wzorze jest postaci:

(A) $z = \dfrac{pa^2}{\mu b^2 + pa^2}$

(B) $z = \dfrac{p^2 a^2}{\mu b^2 + p^2 a^2}$

(C) $z = \dfrac{a^2}{\mu b^2 + a^2}$

(D) $z = \dfrac{pa^2}{b^2 + pa^2}$

(E) $z = \dfrac{p^2 a^2}{b^2 + p^2 a^2}$

Zadanie 5.
Towarzystwo ubezpieczeniowe inwestuje (w papiery wartościowe o stałej stopie zwrotu $i = 6\%$) kapitał u i składkę zebraną na początku roku Π, a na koniec roku wypłaca odszkodowania w łącznej kwocie W. W rezultacie wynik działalności Z za rok czasu jest równy:

- $Z = ui + \Pi(1+i) - W$.

Załóżmy, że W ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji $\mu^2 / 100$.
Decyzja o wysokości składki Π oraz wysokości potrzebnego kapitału u podejmowana jest ze względu na oczekiwania udziałowców, którzy:

- w zamian za podjęcie ryzyka, iż z prawdopodobieństwem 1/20 ich strata przekroczy 10% wyłożonego kapitału: $\Pr(Z < -10\% u) = 0.05$,
- żądają, aby oczekiwana stopa zwrotu $\frac{E(Z)}{u}$ wyniosła 15% (a więc o 9 punktów procentowych przekroczyła stopę zwrotu z bezpiecznych inwestycji)

Przy tych założeniach składka z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) $\Pi \approx \mu$

(B) $\Pi \approx 101\%\mu$

(C) $\Pi \approx 102\%\mu$

(D) $\Pi \approx 104\%\mu$

(E) $\Pi \approx 106\%\mu$

Zadanie 6.
Kierowca charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ zgłasza szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona, z intensywnością λ rocznie oraz rozkładem wartości pojedynczej szkody Y (takim samym bez względu na poziom parametru λ) takim, że:

- $Var(Y) = [E(Y)]^2$

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych charakteryzują momenty:

- $E(\Lambda) = 3/10, Var(\Lambda) = 3/100$

Typowy predyktor parametru ryzyka Λ (najlepszy liniowy nieobciążony) oparty na zaobserwowanej w ciągu sześciu poprzednich lat średniorocznej liczby szkód zgłoszonych $\overline{N}$ jest postaci:

- $BLUP(\Lambda|\overline{N}) = z_N \overline{N} + (1 - z_N)E(\Lambda)$

Rozważmy liniowy nieobciążony predyktor parametru ryzyka Λ oparty na średniorocznej (za ostatnie 6 lat) wartości szkód $\overline{X}$, zakładający znajomość wartości oczekiwanej $E(Y)$:

- $BLUP(\Lambda|\overline{X}) = z_X \dfrac{\overline{X}}{E(Y)} + (1 - z_X)E(\Lambda),$

gdzie stały współczynnik z_X jest (podobnie jak w poprzednim przypadku współczynnik z_N) dobrany tak, aby zminimalizować wariancję tego predyktora.

Stosunek współczynników $\dfrac{z_N}{z_X}$ wynosi:

(A) 2

(B) 13/8

(C) 16/11

(D) 11/8

(E) 16/13

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki:

- $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

u jest nadwyżką początkową, ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t, $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat, a pojedyncze wypłaty Y_i są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wtedy dla każdego $u \geq 0$ zachodzi $F_L(u) = 1 - \Psi(u)$.

Gęstość rozkładu wartości pojedynczej szkody jest na półosi dodatniej dana wzorem:

- $f_Y(y) = \dfrac{24}{(2+y)^4}$

Niech c^* oznacza najmniejszą z takich wartości parametru c, przy której $E(L) \leq 10$. Wobec tego parametr c (intensywność składki) wynosi:

(A) 13/12

(B) 11/10

(C) 9/8

(D) 6/5

(E) 5/4

Zadanie 8.
W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, wykładniczym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{g}{\exp(g) - 1} \exp(gt)$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą jeden (rok).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, zostanie jeszcze przed końcem tego roku zlikwidowana, wynosi:

(A) $\frac{g(\exp(1+g) - 1)}{(1+g)(\exp(1+g) - e)}$

(B) $1 - \frac{g(\exp(1+g) - 1)}{(1+g)(\exp(1+g) - e)}$

(C) $\frac{\exp(1+g) - 1}{(1+g)e}$

(D) $1 - \frac{\exp(1+g) - 1}{(1+g)e}$

(E) $1 - \frac{g(\exp(1+g) - 1)}{\exp(g)(\exp(1+g) - e)}$

Zadanie 9.

Przy danej wartości parametru ryzyka Λ łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka ma złożony rozkład Poissona z parametrami $\left(\Lambda, F_{Y/\Lambda}(\cdot)\right)$, a warunkowa wartość oczekiwana pojedynczej szkody Y dana jest wzorem:

$$E(Y|\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\Lambda}}.$$

Parametr ryzyka Λ ma rozkład Pareto dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{5}{(1+\lambda)^6}.$$

$E(X)$ wynosi:

(A) 2/11

(B) 20/99

(C) 10/44

(D) 10/45

(E) 2/9

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu wartość szkód ma złożony rozkład Poissona z częstotliwością szkód równą 3ln(2) i rozkładem wartości pojedynczej szkody danym wzorem:

$$\Pr(Y = k) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{0.5^k}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód wyniesie 7, równe jest:

(A) 10/256

(B) 9/256

(C) 8/256

(D) 7/256

(E) 6/256

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 czerwca 2004 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	D	
4	A	
5	A	
6	B	
7	D	
8	B	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.