Zadanie 1. W kolejnych okresach czasu $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ, generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne $N_1, N_2, ..., N_5$ są warunkowo niezależne i:

$$\Pr(N_t = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametr ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych przyjmuje wartości: 1/4 lub 1/2.
Mamy do czynienia z dwuetapowym doświadczeniem losowym:

- najpierw losujemy ubezpieczonego zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa $\Pr(\Lambda = 1/4) = 1/2 = \Pr(\Lambda = 1/2)$
- następnie obserwujemy liczby generowanych przez niego szkód N_1, N_2, N_3, N_4.

Staramy się przewidzieć liczbę szkód w następnym okresie, czyli N_5.
Jeśli wiadomo, że: $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 0$, to (warunkowe) prawdopodobieństwo tego, że $N_5 = 0$ jest równe (w przybliżeniu):

(A) 0.77

(B) 0.73

(C) 0.69

(D) 0.65

(E) 0.61

Zadanie 2. W pewnym ubezpieczeniu jedynie pewna część szkód jest zgłaszana. Niech K oznacza liczbę szkód zaszłych, zaś N – liczbę szkód zgłoszonych. Niech i numeruje szkody zaszłe, a M_i oznacza zmienną przyjmującą wartość 1 gdy i-tą szkodę zgłoszono, – a wartość 0 – gdy jej nie zgłoszono. Wtedy:

$N = M_1 + M_2 + \cdots + M_K$

Załóżmy, że M_i są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i od zmiennej K, oraz iż zmienna K ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną λ. Przyjmijmy założenia liczbowe:

- $\Pr(M_i = 1) = 2/3$
- $\lambda = 1$

Warunkowa wariancja ilości szkód nie-zgłoszonych, pod warunkiem iż zgłoszono dwie szkody:

$Var(K - N | N = 2)$

wynosi:

(A) 1/3

(B) 1/2

(C) 2/3

(D) 5/6

(E) 1

Zadanie 3. Wiadomo, że rozkład sumy $W = X_1 + X_2$ dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych dwumianowych z parametrami odpowiednio (n, q_1, F_1) oraz (n, q_2, F_2) jest także rozkładem złożonym dwumianowym o parametrach (n, q_W, F_W), gdzie dystrybuanta F_W dana jest wzorem:

$\forall x \quad F_W(x) = w_1 F_1(x) + w_2 F_2(x) + (1 - w_1 - w_2)(F_1 * F_2)(x)$,

i gdzie $F_1 * F_2$ oznacza dystrybuantę sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o dystrybuantach F_1 oraz F_2.

Przyjmijmy założenia liczbowe:

- $q_1 = 1/3$ oraz $q_2 = 1/4$

Wyznacz wartość parametru w_1 wzoru na dystrybuantę F_W.

Uwaga: parametry rozkładu złożonego dwumianowego podajemy jako trójkę (n, q, F), gdzie (n, q) to parametry rozkładu dwumianowego liczby szkód zaś F to dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody taka, że $F(0) = 0$.

(A) $w_1 = 1/6$

(B) $w_1 = 1/4$

(C) $w_1 = 1/3$

(D) $w_1 = 1/2$

(E) $w_1 = 2/3$

Zadanie 4. Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki:

- $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

u jest nadwyżką początkową, ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t, $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat, a pojedyncze wypłaty Y_i są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$.
Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wtedy dla każdego $u \geq 0$ zachodzi:
$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0)$.

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi:
$c = \lambda\mu \cdot 120\%$.

Oblicz $\Psi(E(L))$, czyli prawdopodobieństwo ruiny przy założeniu, iż kapitał początkowy równy jest wartości oczekiwanej maksymalnej straty.

(A) $\Psi(E(L)) \approx 0.36$

(B) $\Psi(E(L)) \approx 0.64$

(C) $\Psi(E(L)) \approx 0.50$

(D) $\Psi(E(L)) \approx 0.25$

(E) $\Psi(E(L)) \approx 0.75$

Zadanie 5. Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki:

- $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

u to nadwyżka początkowa, $N(t)$ to proces Poissona z parametrem intensywności λ, ct to suma składek zgromadzonych do momentu t, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to suma wypłat, a pojedyncze wypłaty Y_i to zmienne losowe o identycznym rozkładzie, niezależne nawzajem i od procesu $N(t)$.
Niech $c = (1+\theta)\lambda E(Y)$.

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2 y^3}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left(y + \frac{1}{y} - 2\right)\right].$$

O rozkładzie tym wiadomo, że:

- $E(Y) = 1$, $Var(Y) = \sigma^2$, oraz iż:
- funkcja $E(\exp(tY))$ przyjmuje wartości skończone dla $t \le \sigma^{-2}/2$, i ma wtedy postać:
- $E(\exp(tY)) = \exp\left(\sigma^{-2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2t\sigma^2}\right)\right)$.

Niech $\overline{\theta}$ oznacza maksymalną wartość parametru θ spośród takich jego dodatnich wartości, dla których współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) istnieje bez względu na to, ile wynosi wariancja σ^2 zmiennej *Y*.
Spośród poniższych pięciu zdań wybierz zdanie prawdziwe.

(A) $\overline{\theta}$ nie istnieje, bo *R* istnieje dla dowolnych $\theta > 0$ i $\sigma^2 > 0$

(B) $\overline{\theta}$ nie istnieje, bo dla dowolnego $\theta > 0$ można wskazać takie $\sigma^2 > 0$, że *R* nie istnieje

(C) $\overline{\theta} = e - 1$

(D) $\overline{\theta} = 1/2$

(E) $\overline{\theta} = 1$

Zadanie 6. Niech $X_{t,j}$ oznacza wartość szkód z pewnego portfela, które zaszły w roku *t*, a likwidowane są w roku $t + j$. Przyjmujemy założenie, że dla każdego *t* oraz *j* zmienne te mają złożone rozkłady Poissona o parametrach $(\lambda \cdot r_j, F_Y)$, a więc iż rozkład wartości pojedynczej szkody jest bez względu na rok zajścia i rok likwidacji taki sam, oczekiwana liczba szkód zaszłych w każdym roku jest taka sama i wynosi λ, zaś współczynniki rozkładu opóźnienia r_j są nieujemne i sumują się do jedynki: $\sum_{j=0}^{\infty} r_j = 1$. Załóżmy też, że wszystkie zmienne $X_{t,j}$ są nawzajem niezależne (jeśli tylko $t \neq \tau$ lub $i \neq j$ to $X_{t,j}$ i $X_{\tau,i}$ niezależne).

Przy założeniach:

- $\lambda = 500$;
- $E(Y) = 3$
- $Var(Y) = 3$
- współczynniki $r_0, r_1, r_2, \ldots$ tworzą ciąg geometryczny: $r_{j+1} = \frac{2}{3} r_j$

oblicz wariancję łącznej wartości szkód zaszłych przed końcem roku *T*, które przed końcem tego roku nie zostały zlikwidowane, a więc wariancję sumy:

$$S_T = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=t+1}^{\infty} X_{T-t,j}$$

Uwaga: zakładamy że proces przebiega „od zawsze”, tzn. dla ustalonego T i dowolnie wielkich t zmienna $X_{T-t,j}$ spełnia założenia.

(A) $Var(S_T) = 12\,000$

(B) $Var(S_T) = 6\,000$

(C) $Var(S_T) = 36\,000$

(D) $Var(S_T) = 3\,000$

(E) $Var(S_T) = 24\,000$

Zadanie 7. Łączna wartość szkód w pewnym portfelu ryzyk: $W = Y_1 + \ldots + Y_N$ ma złożony rozkład Poissona, gdzie $E(N) = 270$ i wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$.

Niech teraz zmienna $W_R(d)$ oznacza łączną wartość nadwyżek każdej ze szkód ponad wartość *d*, pokrywaną przez reasekuratora:

- $W_R(d) = (Y_1 - d)_+ + \ldots + (Y_N - d)_+$,

zaś zmienna $W_U(d) = W - W_R(d)$ oznacza pozostałą na udziale własnym ubezpieczyciela kwotę, a więc:

- $W_U(d) = \min\{Y_1, d\} + \ldots + \min\{Y_N, d\}$.

Dobrano taką wartość d^* parametru podziału ryzyka z przedziału $(0, 1)$, która minimalizuje sumę wariancji $Var(W_U(d)) + Var(W_R(d))$. Minimalna wartość tej sumy, czyli $Var(W_U(d^*)) + Var(W_R(d^*))$, wynosi:

(A) 36

(B) 40

(C) 45

(D) 48

(E) 50

Zadanie 8. Ubezpieczyciel pokrywa ryzyka, które za okres roku generują łączną wartość szkód:
$W = Y_1 + \ldots + Y_N$,

- o złożonym rozkładzie Poissona, gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody Y dany jest dystrybuantą F taką, że $F(0) = 0$
- pobiera za to pokrycie składkę w wysokości składki netto $E(W)$

Niech $M = \min\{m : \quad F(m) = 1\}$ będzie maksymalną wartością szkody z pokrywanych ryzyk.

Rozważmy liczbę c taką, że jeśli tylko zachodzi nierówność:

- $M \leq c \cdot E(W)$

to współczynnik zmienności zmiennej W nie przekroczy jednej szesnastej:

- $\dfrac{\sqrt{VAR(W)}}{E(W)} \leq \dfrac{1}{16}$

Znajdź liczbę c^*, która jest największą spośród liczb c o powyższej własności.

(A) $c^* = \dfrac{1}{16}$

(B) $c^* = \dfrac{1}{256}$

(C) $c^* = \dfrac{1}{4}$

(D) $c^* = \dfrac{1}{8}$

(E) $c^* = \dfrac{1}{64}$

Zadanie 9. Przy danej wartości parametru ryzyka Λ łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka ma złożony rozkład Poissona z parametrami $\left(\Lambda, F_{Y/\Lambda}(\cdot)\right)$, a warunkowa wartość oczekiwana pojedynczej szkody Y dana jest wzorem:

$E(Y|\Lambda) = 18 + 3\Lambda$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład Gamma(α, β), dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\lambda),$$

z parametrami: $\alpha = 2$, $\beta = 18$.

$E(X)$ wynosi:

(A) $2\frac{1}{27}$

(B) $2\frac{1}{18}$

(C) $2\frac{1}{9}$

(D) $2\frac{1}{6}$

(E) $2\frac{1}{3}$

Zadanie 10. Załóżmy, że w modelu procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym zmienna W_n wyraża łączną wartość szkód w roku n-tym. Zmienne te w kolejnych latach są niezależne i mają identyczny rozkład dany na przedziale $(0,1)$ gęstością:

- $f_W(x) = 12x(1-x)^2$

Ubezpieczyciel w każdym roku pobiera składkę c. Dywidenda D_n wypłacana akcjonariuszom w roku n-tym zależna jest jedynie od wyniku tego roku, i wynosi:

- $D_n = \max\{0, \quad \delta \cdot (c - W_n)\}$, $\delta \in (0,1)$,

co oznacza, że akcjonariusze mają udział $100 \cdot \delta$–procentowy w dodatnim wyniku, natomiast nie partycypują w stratach. W rezultacie proces nadwyżki U_n ubezpieczyciela ma przyrosty niezależne o postaci:

- $U_n - U_{n-1} = \begin{cases} c - W_n & gdy \quad W_n > c \\ (1-\delta)\cdot(c - W_n) & gdy \quad W_n \le c \end{cases}$

Wiadomo, że przy danej składce c wskaźnik udziału δ powinien być niższy od takiej wartości δ^*, przy której przyrost procesu będzie miał zerową wartość oczekiwaną. Dla składki $c = 1/2$ parametr δ^* wynosi (w przybliżeniu):

(A) 70%

(B) 60%

(C) 50%

(D) 40%

(E) 30%

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 grudnia 2003 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	D	
4	A	
5	E	
6	A	
7	E	
8	B	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.