Zadanie 1.
Ilość szkód N ma rozkład o prawdopodobieństwach spełniających zależność rekurencyjną:

$$\frac{\Pr(N = k)}{\Pr(N = k-1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{k}\right), \qquad k = 1,2,3,...$$

Jeśli wiemy, że $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N = k) = 1$, to prawdopodobieństwo, że zdarzy się zerowa liczba szkód wynosi:

(A) $\Pr(N = 0) = \frac{1}{81}$

(B) $\Pr(N = 0) = \frac{16}{81}$

(C) $\Pr(N = 0) = \frac{8}{81}$

(D) $\Pr(N = 0) = \frac{1}{27}$

(E) $\Pr(N = 0) = \frac{8}{243}$

Zadanie 2.
Rozkład wartości pojedynczej szkody Y określony jest na nieujemnych liczbach całkowitych. W poniższej tabeli zawarte są informacje o wartości oczekiwanej szkody uciętej:

M	3	4	5	6
$E(\min\{Y, M\})$	2.46	3.04	3.46	3.78

Z informacji tych wynika, że $\Pr(Y = 5)$ wynosi:

(A) 0.08

(B) 0.10

(C) 0.12

(D) 0.14

(E) 0.16

Zadanie 3.
Łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka miała w roku ubiegłym rozkład złożony:
$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$,
z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym na półosi dodatniej gęstością:
$$f_Y(x) = \frac{3}{(1+x)^4}.$$
O ile procent wzrośnie składka netto za pokrycie nadwyżki każdej szkody z tego ryzyka ponad kwotę d, jeśli kwota ta jest niezmienna i wynosi $d = 5$, natomiast ceny, w których wyrażone są szkody wzrosną o 25% (tzn. teraz ceny równe są 5/4 cen poprzednich)?

(A) składka netto wzrośnie o 25%

(B) składka netto wzrośnie o $33\frac{1}{3}$%

(C) składka netto wzrośnie o 50%

(D) składka netto wzrośnie o 60%

(E) składka netto wzrośnie o 80%

Zadanie 4.
Zmienne X_0 oraz X_1 reprezentują łączną wartość szkód z pewnego portfela ryzyk odpowiednio w roku ubiegłym oraz roku nadchodzącym.
Zmienne te są (przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ) zmiennymi losowymi warunkowo niezależnymi, o rozkładach złożonych Poissona o takiej samej oczekiwanej liczbie szkód λ i takim samym rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y, z parametrami $E(Y) = \mu$ i wariancją $Var(Y) = \sigma^2$.
Parametr ryzyka Λ ma rozkład, o którym wiemy, że:

- $E(\Lambda) = \overline{\Lambda}$, $Var(\Lambda) = L^2$.

Rozważamy predykcję łącznej wartości szkód w roku nadchodzącym X_1 przy założeniu, że znamy wartości parametrów μ, σ^2, $\overline{\Lambda}$ oraz L^2, a także iż zaobserwowaliśmy liczbę szkód N_0 oraz łączną wartość szkód X_0 w roku ubiegłym.
Dwa alternatywne predyktory są postaci:

- $pred_1 = \mu \cdot \left[N_0 \cdot z_N + \overline{\Lambda} \cdot (1 - z_N)\right]$,
- $pred_2 = X_0 \cdot z_X + \mu \cdot \overline{\Lambda} \cdot (1 - z_X)$.

Wartości każdego ze współczynników z_N oraz z_X dobrane są tak, aby zminimalizować błędy średniokwadratowe predyktorów.
Różnica błędów średniokwadratowych:

- $E\left\{(X_1 - pred_2)^2\right\} - E\left\{(X_1 - pred_1)^2\right\}$

wynosi:

(A) $$\frac{\overline{\Lambda} \cdot L^4 \cdot \mu^2}{\left(\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2\right) \cdot \left(\overline{\Lambda} + L^2\right)}$$

(B) $$\frac{\overline{\Lambda} \cdot L^4 \cdot \sigma^2}{\left(\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2\right) \cdot \left(\overline{\Lambda} + L^2\right)}$$

(C) $$\frac{\overline{\Lambda} \cdot L^4 \cdot \sigma^2}{\left(\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2\right)^2}$$

(D) $$\frac{\overline{\Lambda}^2 \cdot L^2 \cdot \sigma^2}{\left(\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2\right)^2}$$

(E) $$\frac{\overline{\Lambda}^2 \cdot L^2 \cdot \mu^2}{\left(\overline{\Lambda} \cdot \left(1 + \sigma^2/\mu^2\right) + L^2\right)^2}$$

Zadanie 5.
X_1 oraz X_2 to dwa ryzyka (zmienne losowe) niezależne o tym samym rozkładzie danym dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & gdy \quad x < 0 \\ 0.6 + 0.2 \cdot x & gdy \quad x \in [0, 1) \\ 1 & gdy \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, iż ich suma nie przekroczy liczby $1/2$ wynosi:

(A) $F_{X_1+X_2}(0.5) = 0.485$

(B) $F_{X_1+X_2}(0.5) = 0.495$

(C) $F_{X_1+X_2}(0.5) = 0.500$

(D) $F_{X_1+X_2}(0.5) = 0.490$

(E) $F_{X_1+X_2}(0.5) = 0.480$

Zadanie 6. Dana jest rodzina zmiennych losowych $\{Y_M\}_{M\in(0,1]}$ indeksowana parametrem M o dystrybuantach:

$$F_M(y)=\begin{cases} y^2 & gdy \quad y<M \\ 1 & gdy \quad y\geq M \end{cases}, \qquad M\in(0,1]$$

oraz rodzina zmiennych $\{W_M\}_{M\in(0,1]}$ o rozkładach złożonych Poissona o parametrach $(\lambda, F_M(\cdot))$.

Niech $V^2(W_M)$ oznacza dla dowolnego $M\in(0,1]$ kwadrat współczynnika zmienności (stosunek wariancji do kwadratu wartości oczekiwanej) zmiennej W_M.

Pochodną logarytmiczną współczynnika $V^2(W_M)$ można wyrazić wzorem:

$$\frac{\partial}{\partial M}\ln\left(V^2(W_M)\right)=\frac{2M\left(1-M^2\right)}{\left(a-M^2\right)\left(b-M^2\right)}, \quad M\in(0,1).$$

Parametry (a,b) powyższego wzoru są równe (kolejność podania parametrów jest oczywiście obojętna):

(A) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

(B) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(E) $(2, 3)$

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody jest mieszaniną dwóch rozkładów wykładniczych, i jego gęstość jest na półosi dodatniej dana wzorem:
$$f_Y(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{1}{4} x \right) + \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{1}{12} x \right) \right)$$
- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 1000$,

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

(A) $\frac{16}{30}$

(B) $\frac{20}{30}$

(C) $\frac{24}{30}$

(D) $\frac{27}{30}$

(E) 1

Zadanie 8.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

- nadwyżka początkowa wynosi 1.5,
- składka roczna wynosi 1,

a łączna wartość szkód w każdym roku (niezależnie od łącznej wartości szkód w innych latach):

- wynosi 0 z prawdopodobieństwem dwie trzecie,
- wynosi 2 z prawdopodobieństwem jedna trzecia.

Prawdopodobieństwo ruiny (pojawienia się ujemnej nadwyżki na koniec któregokolwiek z lat) wynosi:

(A) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(B) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Zadanie 9.

Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0,+\infty)$
- z pewną masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$,

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t \to \infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej,
- $h_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania maleje z czasem wykładniczo, a dokładniej, dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej postaci:

- $h_T(t) = \alpha \cdot \exp(-\beta \cdot t)$, o parametrach $\alpha, \beta > 0$.

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej wyraża się wzorem:

(A) $\Pr(T < \infty) = 1$

(B) $\Pr(T < \infty) = 1 - \exp(-\alpha)$

(C) $\Pr(T < \infty) = 1 - \exp(-\alpha / \beta)$

(D) $\Pr(T < \infty) = \exp(-\alpha)$

(E) $\Pr(T < \infty) = \exp(-\alpha / \beta)$

Wskazówka: możesz wykorzystać znaną tożsamość: $h(t) = -\dfrac{\partial}{\partial t} \ln(1 - F(t))$

Zadanie 10.

Mamy dwie zmienne losowe: czas zajścia szkody w ciągu roku kalendarzowego, oraz czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji. Załóżmy, że zmienne te są niezależne, a więc iż upływ czasu od momentu zajścia do momentu likwidacji szkody nie zależy od tego, w którym momencie czasu kalendarzowego do szkody doszło.

Przyjmujemy, że jednostką pomiaru czasu (dla obu zmiennych) jest 1 rok. Czas zajścia szkody w ciągu roku kalendarzowego ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}.

Prawdopodobieństwo, iż szkoda zostanie zlikwidowana w ciągu tego samego roku kalendarzowego, w którym do niej doszło, wynosi:

(A) $1-\frac{1-\exp(-\beta)}{\beta}$

(B) $\exp(-\beta)\frac{(\exp(\beta)-1)^2}{\beta}$

(C) $\frac{1-\exp(-\beta)}{\beta}$

(D) $\frac{1-\beta\exp(-\beta)}{\beta}$

(E) $1-\frac{1-\beta\exp(-\beta)}{\beta}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2003 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	E	
4	B	
5	A	
6	E	
7	C	
8	D	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.