Zadanie 1

Rozważmy następujący model strzelania do tarczy. Współrzędne punktu trafienia (X, Y) są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Punkt $(0,0)$ uznajemy za środek tarczy, zatem $\sqrt{X^2 + Y^2}$ jest odległością od środka. Oddano n niezależnych strzałów $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Oblicz wartość oczekiwaną odległości od środka najlepszego ze strzałów, czyli

$$E \min\left(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, \ldots, \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right).$$

(A) $\sqrt{\dfrac{\pi\sigma}{2n}}$

(B) $\sqrt{\dfrac{\pi\sigma^2}{2} \cdot \dfrac{1}{n}}$

(C) $\sqrt{\dfrac{\pi\sigma^2}{2n}}$

(D) $\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2n}}$

(E) $\sqrt{\dfrac{\pi\sigma^2}{n}}$

Wskazówka: Zmienna losowa $\min\left(X_1^2 + Y_1^2, \ldots, X_n^2 + Y_n^2\right)$ ma rozkład wykładniczy. Można skorzystać z faktu, że $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Zadanie 2
W urnie znajduje sie 10 kul Amarantowych, 10 kul Białych i 10 kul Czarnych.
Losujemy bez zwracania 12 kul. Niech

- A oznacza liczbę wylosowanych kul Amarantowych,
- B oznacza liczbę wylosowanych kul Białych,
- C oznacza liczbę wylosowanych kul Czarnych.

Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych A i B,

$$corr(A,B)$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{12}{30}$

(D) $\frac{24}{30}$

(E) $-\frac{24}{30}$

Wskazówka: $Var(A+B+C)=0$.

Zadanie 3
Wykonujemy 4 rzuty kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby oczek otrzymane w kolejnych rzutach tworzą ciąg *ściśle rosnący*.

(A) $\frac{4}{6}$

(B) $\frac{2}{6}$

(C) $\frac{1}{6^4} \cdot \binom{6}{4}$

(D) $\frac{4!}{6^4}$

(E) $\frac{4!}{6!}$

Zadanie 4
Dysponujemy danymi o liczbie szkód zgłoszonych przez klientów $1,2,...,k$ w ciągu n lat. Niech $S_i(n)$ oznacza sumaryczną liczbę szkód dla klienta numer i w ciągu n lat. Wiemy, że $S_1(n),...,S_k(n)$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Poissona. Mamy też pewne przypuszczenia dotyczące intensywności pojawiania się szkód, czyli wartości oczekiwanych tych zmiennych, ale nie jesteśmy ich pewni.

Weryfikujemy hipotezę statystyczną

> H_0: dla każdego $i = 1,...,k$, zmienna losowa $S_i(n)$ ma rozkład Poissona z parametrem $n\lambda_i$.

Hipotetyczne intensywności $\lambda_1,...,\lambda_k$ są danymi, ustalonymi liczbami dodatnimi.

Używamy pewnej odmiany testu chi-kwadrat: obliczamy statystykę

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(S_i(n) - n\lambda_i)^2}{n\lambda_i}.$$

Jaki jest rozkład graniczny tej statystyki χ^2, jeśli H_0 jest prawdziwa i $n \to \infty$?

(A) rozkład χ^2 z $k-1$ stopniami swobody

(B) rozkład χ^2 z k stopniami swobody

(C) pewien rozkład prawdopodobieństwa mający gęstość, nie należący do rodziny rozkładów χ^2.

(D) zdegenerowany rozkład prawdopodobieństwa, skupiony w punkcie 0

(E) rozkład χ^2 z n stopniami swobody

Zadanie 5
Rozważamy model K obiektów obserwowanych przez T okresów czasu, gdzie zarówno K jak i T są dużymi liczbami. Przyjmujemy następujące założenia:

- dla każdego $k = 1,2,...,K$ oraz $t = 1,2,...,T$ warunkowy rozkład zmiennej losowej $X_{t,k}$ przy danej wartości zmiennej μ_k jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej i wariancji $\left(\mu_k, \sigma^2\right)$;
- dla każdego $k = 1,2,...,K$ rozkład zmiennej losowej μ_k jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej i wariancji $\left(\mu, a^2\right)$.

Przyjmijmy typowe oznaczenia dla średnich obiektowych i średniej ogólnej:

$$\overline{X}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{t,k}, \; k = 1,2,...,K, \qquad \text{oraz} \qquad \overline{X} = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{T} \overline{X}_k .$$

Międzyobiektową i wewnątrzobiektową sumę kwadratów odchyleń oznaczmy:

$$SSB = \sum_{k=1}^{K}\left(\overline{X}_k - \overline{X}\right)^2, \qquad SSW = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\left(X_{t,k} - \overline{X}_k\right)^2$$

Wiadomo, że zmienne losowe SSB i SSW są niezależne,

$$E\{SSB\} = (K-1)\left(a^2 + \frac{\sigma^2}{T}\right), \qquad E\{SSW\} = K(T-1)\sigma^2$$

Dobierz stałą *const* tak, aby wartość oczekiwana wyrażenia:

$$const \cdot \frac{SSW}{SSB} \quad \text{wyniosła} \quad \frac{\sigma^2}{a^2 T + \sigma^2}.$$

(A) $const = \dfrac{K-3}{TK(T-1)}$

(B) $const = \dfrac{K-2}{TK(T-1)}$

(C) $const = \dfrac{K-1}{TK(T-1)}$

(D) $const = \dfrac{K-2}{T(K+1)(T-1)}$

(E) $const = \dfrac{K-1}{T(K+1)(T-1)}$

Uwaga (dopisana po egzaminie):
Wynik stanowi podstawę konstrukcji nieobciążonego estymatora współczynnika *credibility z*, a dokładniej jego dopełnienia $(1-z)$. Wynik ten prowadzi do wniosku, że na zwiększenie precyzji predykcji μ_k na drodze uwzględnienia danych o pozostałych grupach (*collateral data*) możemy liczyć dopiero wtedy, gdy liczba grup K wyniesie co najmniej 4.

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1,...,X_4$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ o nieznanej wartości oczekiwanej i nieznanej wariancji, zaś X_5 jest zmienną losową z tego samego rozkładu, niezależną od próbki. Interpretujemy zmienną X_5 jako kolejną obserwację, która pojawi się w przyszłości, ale obecnie jest nieznana. Zbuduj „przedział ufności''

$$[L,U]=[L(X_1,...,X_4),U(X_1,...,X_4)]$$

oparty na próbce $X_1,...,X_4$ taki, że

$$\Pr\{L(X_1,...,X_4)\le X_5\le U(X_1,...,X_4)\}=0.95\,,$$

przy tym żądamy, żeby przedział był symetryczny, tzn. $\frac{1}{2}(L+U)=\overline{X}$. Używamy tutaj oznaczeń:

$$\overline{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i,\qquad S^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2.$$

(A) $L=\overline{X}-3.558\cdot S$, $U=\overline{X}+3.558\cdot S$

(B) $L=\overline{X}-1.591\cdot S$, $U=\overline{X}+1.591\cdot S$

(C) $L=\overline{X}-3.182\cdot S$, $U=\overline{X}+3.182\cdot S$

(D) $L=\overline{X}-3.104\cdot S$, $U=\overline{X}+3.104\cdot S$

(E) $L=\overline{X}-0.558\cdot S$, $U=\overline{X}+0.558\cdot S$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, ..., X_9$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,1)$ o nieznanej wartości oczekiwanej i znanej wariancji $\sigma^2 = 1$. Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1 : \mu = 0.5$. Należy zbudować taki test, dla którego *suma* prawdobodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.

(A) 0.1000

(B) 0.2266

(C) 0.1336

(D) 0.0500

(E) 0.4533

Zadanie 8
Wektor losowy (X,Y) ma łączny rozkład prawdopodobieństwa dany następującą tabelką:

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$\frac{1}{4}(1-\theta)$	$\frac{1}{4}\theta$
$X=2$	$\frac{3}{4}\theta$	$\frac{3}{4}(1-\theta)$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie 25-elementowej próbki z tego rozkładu, $(X_1,Y_1),...,(X_{25},Y_{25})$ obliczono estymator *największej wiarogodności* $\hat{\theta}$. Oblicz wariancję estymatora, $Var(\hat{\theta})$.

(A) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{5}$

(B) $Var(\hat{\theta}) = \frac{3}{20}$

(C) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{20}$

(D) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{25}$

(E) $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{5}$

Zadanie 9

Niech $X_1,\dots,X_n,\dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & dla \quad x > 0; \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku. \end{cases}$$

Niech N będzie zmienną losową niezależną od $X_1,\dots,X_n,\dots$, o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Niech

$$Y = \begin{cases} \min\{X_1,\dots,X_N\}, & gdy \quad N > 0; \\ 0 & gdy \quad N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(N \mid Y = y)$ przy założeniu, że $y > 0$.

(A) $1 + \lambda e^{-\alpha y}$

(B) $1 - \alpha e^{-\lambda y}$

(C) $\lambda e^{-\alpha y}$

(D) $1 - \lambda e^{-\alpha y}$

(E) $\alpha \lambda e^{-\alpha y}$

Zadanie 10

Rozważmy trzy zdarzenia losowe E, C_1, C_2 w pewnej przestrzeni probabilistycznej Ω. Niech E', C_1', C_2' oznaczają zdarzenia przeciwne. Wiemy, że

- Zdarzenia C_1, C_2 są niezależne i $\Pr(C_1) = \Pr(C_2) = p$;
- $\Pr(E \mid C_1) = \Pr(E \mid C_2) = \Pr(E \mid C_1 \cap C_2) = r$;
- $\Pr(E' \mid C_1' \cap C_2') = 1$.

Oblicz $\Pr(C_1 \mid E)$.

(A) $\dfrac{1}{2-p}$

(B) p

(C) $\dfrac{r}{2-p}$

(D) $\dfrac{1}{1+p}$

(E) $\dfrac{r}{1+p}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 maja 2003 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z O D P O W I E D Z I...........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	C	
4	B	
5	A	
6	A	
7	E	
8	D	
9	A	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.