Zadanie 1. Pewne ryzyko generuje jedną szkodę z prawdopodobieństwem q, zaś zero szkód z prawdopodobieństwem $(1-q)$.

Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę szkody ponad udział własny w wysokości d, jednak nie więcej niż $\alpha\%$ jej wartości, to znaczy że odszkodowanie za szkodę o wartości y wynosi:

$I(y) = \min\{\max\{0, y-d\}, \quad y \cdot \alpha\%\}$.

Przyjmijmy, że:

- $q = 1/5$
- $d = 1$
- $\alpha\% = 80\%$
- wartość szkody (pod warunkiem że do niej dojdzie) ma rozkład równomierny na przedziale $(0, 10)$.

Składka netto (wartość oczekiwana wypłaty z tego ryzyka) wynosi:

(A) 0.70

(B) 0.72

(C) 0.74

(D) 0.76

(E) 0.78

Zadanie 2. Szkoda Y może przyjmować wartości ze skończonego zbioru liczb $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ takich, że $\min\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \geq 2$. Łączna wartość szkód w portfelu W równa się:

$$W = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i ,$$

gdzie N_i to liczba szkód o wartości y_i.

Załóżmy, że $N_1, \ldots, N_n$ to nawzajem niezależne zmienne losowe o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wiemy, że:

- $E(W) = 50$
- $VAR(W) = 660$
- $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 10$

Jeżeli do każdej szkody zastosujemy udział własny ubezpieczonego w wysokości $d = 2$, to wariancja łącznej wartości szkód pozostałej na udziale ubezpieczyciela wyniesie:

(A) 460

(B) 500

(C) 540

(D) 560

(E) 600

Zadanie 3. Mamy niepełną informację o rozkładzie zmiennej losowej *X*. Wiemy, że:

- *X* przyjmuje wartości nieujemne
- $E(X) = 6$
- $E\left[(X-4)_+\right] = 2\frac{2}{3}$
- $\Pr(X > 4) = \dfrac{2}{3}$.

Niech $\underline{\sigma}^2$ oznacza najmniejszą możliwą wartość wariancji zmiennej *X*.

(A) $\underline{\sigma}^2 = \dfrac{25}{3}$

(B) $\underline{\sigma}^2 = 8$

(C) $\underline{\sigma}^2 = \dfrac{26}{3}$

(D) $\underline{\sigma}^2 = \dfrac{70}{9}$

(E) $\underline{\sigma}^2 = \dfrac{64}{9}$

Zadanie 4. Zmienna losowa:

$X = M_1 + M_2 + ... + M_N$

ma złożony rozkład ujemny dwumianowy, gdzie liczba składników sumy N ma rozkład ujemny dwumianowy o parametrach (r, q), tzn.:

$$\Pr(N = k) = \binom{r + k - 1}{k}(1 - q)^r q^k, \qquad k = 0,1,2,...,$$

zaś każdy ze składników ma rozkład dwumianowy:

$\Pr(M_i = 1) = 1 - \Pr(M_i = 0) = Q$.

Rozważ, czy rozkład zmiennej losowej X jest rozkładem ujemnym dwumianowym; wybierz poprawną odpowiedź:

(A) Rozkład zmiennej X nie należy do klasy rozkładów ujemnych dwumianowych

(B) $X \sim$ ujemny dwum. o parametrach (r^*, q^*) takich, że $r^* = r$ oraz $q^* = q$

(C) $X \sim$ ujemny dwum. o parametrach (r^*, q^*) takich, że $r^* \neq r$ oraz $q^* \neq q$

(D) $X \sim$ ujemny dwum. o parametrach (r^*, q^*) takich, że $r^* \neq r$ oraz $q^* = q$

(E) $X \sim$ ujemny dwum. o parametrach (r^*, q^*) takich, że $r^* = r$ oraz $q^* \neq q$

Zadanie 5. Zmienna losowa:
$W = X_1 + X_2 + ... + X_n$
jest sumą n składników o identycznym rozkładzie, o wartości oczekiwanej μ_X. Co prawda zmienne te są zależne, ale struktura ich zależności jest dość prosta. W szczególności o momentach centralnych trzeciego rzędu tych zmiennych wiemy, iż dla $i, j, k = 1,2,...,n$ wartość oczekiwana:

$$E\left[(X_i - \mu_X)(X_j - \mu_X)(X_k - \mu_X)\right]$$

wynosi:

- a, jeśli wszystkie trzy liczby i, j, k są różne,
- b, jeśli trójka liczb i, j, k zawiera dwie różne liczby (jedna z liczb powtarza się dwa razy)
- c, jeśli $i = j = k$.

Moment centralny trzeciego rzędu zmiennej W, który generalnie wyraża się wzorem:

$$E\left[(W - E(W))^3\right] = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_X)\right]^3\right\}$$

można przy powyższych założeniach wyrazić jako funkcję parametrów a, b, c oraz n o postaci:

$$E\left[(W - E(W))^3\right] = f_1(n)\cdot a + f_2(n)\cdot b + f_3(n)\cdot c.$$

Funkcja $f_2(n)$ wyraża się wzorem:

(A) $3n(n-1)$

(B) $6n(n-1)$

(C) $3n^2 - 2n$

(D) $6n^2 - 3n$

(E) $6n^2 - 2n$

Zadanie 6. W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ generuje szkody w ilości N_t :

- $\Pr(N_t = k_t | \Lambda = \lambda) = \dfrac{\lambda^{k_t}}{k_t!} \cdot e^{-\lambda}$ $\qquad t = 1, 2$;

przy czym:

- $\Pr(N_1 = k_1 \wedge N_2 = k_2 | \Lambda = \lambda) = \Pr(N_1 = k_1 | \Lambda = \lambda) \cdot \Pr(N_2 = k_2 | \Lambda = \lambda)$.

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych jest rozkładem logarytmiczno-normalnym o parametrach (μ, σ^2),

tzn. zmienna $\ln(\Lambda)$ *ma rozkład normalny o parametrach* (μ, σ^2).

O parametrach tych zakładamy, że:

- $\mu = -\ln(4\sqrt{2})$,
- $\sigma^2 = \ln 2$

W efekcie doświadczenia dwuetapowego (wylosowanie ubezpieczonego, następnie wygenerowanie przez niego szkód w ilości N_1 i potem N_2),
$COV(N_1, N_2)$ wynosi:

(A) $\dfrac{1}{36}$

(B) $\dfrac{1}{32}$

(C) $\dfrac{1}{24}$

(D) $\dfrac{1}{20}$

(E) $\dfrac{1}{16}$

Zadanie 7. Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym. Tak więc:

- szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ
- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = (1+\theta)\cdot \lambda \cdot E(Y)$, gdzie $\theta > 0$
- Y to wartość pojedynczej szkody o takim rozkładzie, że $\Pr(Y > 0) = 1$.

Wiadomo, iż funkcję prawdopodobieństwa ruiny możemy wyrazić w postaci:

$$\Psi(u) = 1 - F_L(u),$$

gdzie maksymalną łączną stratę L możemy przedstawić jako zmienną o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + \ldots + l_N,$$

gdzie N ma rozkład geometryczny o ilorazie postępu $(1+\theta)^{-1}$, zaś l_i to wysokość kolejnego „tąpnięcia" poniżej dotychczas osiągniętego minimum procesu.

Wiemy, że dystrybuanta F_l zmiennej l_i dana jest wzorem:

- $F_l(x) = 1 - \left(\dfrac{5}{5+x}\right)^4$

Oblicz $E(Y)$.

(A) $E(Y) = 4/3$

(B) $E(Y) = 6/5$

(C) $E(Y) = 1$

(D) $E(Y) = 5/4$

(E) $E(Y) = 5/3$

Zadanie 8. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela charakteryzują parametry:

- λ - intensywność Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód,
- u - nadwyżka początkowa,
- rozkład zmiennej Y - wartości pojedynczej szkody,
- θ - stosunkowy narzut na składkę netto.

Załóżmy, iż wartość pojedynczej szkody ma rozkład równomierny na przedziale $(0, M)$, gdzie M jest dodatnie. Załóżmy także, iż $u = 4 \cdot M$. Przyjmijmy wreszcie, iż nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa:

$$\exp(-Ru) = 1/16,$$

gdzie R to tzw. *adjustment coefficient*.

Wartość θ wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) $\theta \approx 27.7\%$

(B) $\theta \approx 31.8\%$

(C) $\theta \approx 35.9\%$

(D) $\theta \approx 40.1\%$

(E) $\theta \approx 44.3\%$

Zadanie 9. Zmienna losowa *S* to zdyskontowana wartość szkód w złożonym procesie Poissona:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cdot \exp(-\delta T_n), \text{ gdzie:}$$

- (Y_1, T_1), (Y_2, T_2), (Y_3, T_3), ... oznaczają odpowiednio wartości oraz momenty zajścia kolejnych szkód;
- zmienne Y_n ($n = 1,2,...$) są nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej β^{-1};
- czasy oczekiwania T_1, $T_2 - T_1$, $T_3 - T_2$, $T_4 - T_3$,... są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $1/\lambda$, niezależnymi także od zmiennych $Y_1, Y_2, Y_3, ...$;
- $\delta > 0$ to natężenie oprocentowania, a wiec $\exp(-\delta t)$ to czynnik dyskonta za okres o długości *t*.

Moment centralny trzeciego rzędu $E\left[(S - E(S))^3\right]$ zmiennej *S* wynosi:

(A) $\dfrac{\lambda}{\delta\beta^3}$

(B) $\dfrac{2\lambda}{\delta\beta^3}$

(C) $\dfrac{\lambda}{(\delta\beta)^3}$

(D) $\dfrac{2\lambda}{(\delta\beta)^3}$

(E) $\dfrac{6\lambda}{(\delta\beta)^3}$

Wskazówka: możesz najpierw wyznaczyć moment centralny trzeciego rzędu zmiennej losowej $S(h)$, która dla dowolnego $h > 0$ jest postaci:

$$S(h) = \sum_{m=1}^{\infty} W(h)_m \cdot \exp(-\delta \cdot h \cdot m),$$

gdzie zmienne $W(h)_1$, $W(h)_2$, ... są niezależne i mają identyczny rozkład złożony Poissona z parametrem częstotliwości λh oraz rozkładem pojedynczego składnika wykładniczym o wartości oczekiwanej β^{-1}. Teraz możesz wykorzystać fakt, że rozkład zmiennej $S(h)$ zbiega przy $h \to 0$ do rozkładu zmiennej *S*.

Uwaga (dopisana po egzaminie):
Zmienna S ma rozkład $\Gamma(\lambda/\delta, \beta)$; łatwiej jednak wyznaczyć kumulantę wybranego rzędu (np. trzeciego, jak w zadaniu) niż rozkład *S*.

Zadanie 10. Załóżmy, że momenty pojawiania się szkód $T_1 < T_2 < ... < T_n < ...$ tworzą proces Poissona na przedziale $(0,\infty)$, o intensywności λ. Innymi słowy,

$$T_1,\ T_2 - T_1,\ T_3 - T_2,\ T_4 - T_3, ...$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Przyjmujemy, że każda szkoda, niezależnie od pozostałych, jest likwidowana po upływie pewnego losowego okresu czasu. Mówiąc dokładniej, momenty likwidacji są zmiennymi losowymi postaci:

$$\widetilde{T}_1 = T_1 + D_1,\ \widetilde{T}_2 = T_2 + D_2\ , ...,\ \widetilde{T}_n = T_n + D_n, ...$$

przy czym „czasy opóźnienia'' D_i są niezależne nawzajem oraz od $T_1, T_2, T_3, ...$ i mają jednakową dystrybuantę F.

Oblicz wartość oczekiwaną liczby szkód zaszłych przed czasem t, ale do tego czasu nie zlikwidowanych, czyli:

- $E[N(t) - \widetilde{N}(t)]$,

gdzie $N(t)$ oznacza liczbę punktów T_i w przedziale $(0,t]$, zaś $\widetilde{N}(t)$ oznacza liczbę punktów $\widetilde{T}_i$ w przedziale $(0,t]$.

(A) $\lambda t(1 - F(t))$

(B) $\lambda \int_0^t F(x)dx$

(C) $\lambda \int_0^t [1 - F(x)]dx$

(D) $\lambda \int_t^\infty [1 - F(x)]dx$

(E) $\lambda t F(t)$

Wskazówka: $E\left[\widetilde{N}(t)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\left(\widetilde{T}_i \le t\right)$.

Uwagi (dopisane po egzaminie):

- przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ dostajemy ważny wynik**:** $E[N(t) - \widetilde{N}(t)] = \lambda \cdot E(D)$, co jest wartością skończoną jeśli tylko $E(D) < \infty$;
- dla obliczenia samej wartości oczekiwanej wystarczyłaby niezależność parami zmiennych D_i, T_i.

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 maja 2003 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z O D P O W I E D Z I...........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	B	
4	E	
5	A	
6	E	
7	D	
8	A	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.