Zadanie 1. W urnie znajduje się 25 kul, z których 15 jest białych i 10 czarnych. Losujemy *bez zwracania* kolejno po jednej kuli. Kończymy losowanie w momencie, kiedy wyciągnięte zostaną wszystkie *czarne* kule.

Oblicz *wartość oczekiwaną* liczby pozostałych w urnie białych kul.

(A) $\frac{15}{10}$

(B) $\frac{15}{11}$

(C) 5

(D) $\frac{15}{25}$

(E) $\frac{16}{11}$

Zadanie 2. Wektor losowy (X,Y) ma łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & gdy \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \ i \ x+y \leq 1; \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku. \end{cases}$$

Podaj gęstość $g(z)$ rozkładu zmiennej losowej $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

(A) $g(z) = 2z$ dla $0 \leq z \leq 1$

(B) $g(z) = 1$ dla $0 \leq z \leq 1$

(C) $g(z) = 2(1-z)$ dla $0 \leq z \leq 1$

(D) $g(z) = 6z(1-z)$ dla $0 \leq z \leq 1$

(E) $g(z) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{z(1-z)}}$ dla $0 \leq z \leq 1$

Zadanie 3. Załóżmy, że $X_1,...,X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym, ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, mającymi momenty rzędu 1, 2 i 3. Znamy

$$\mu = E(X_i) \quad \text{i} \quad \sigma^2 = Var(X_i).$$

Niech $f(x)$ oznacza gęstość rozkładu pojedynczej zmiennej X_i. Wiemy, że rozkład jest symetryczny w tym sensie, że $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ dla każdego $.x$

Oblicz trzeci moment sumy: $E(S_n^3)$, gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$.

(A) $E(S_n^3) = n^2\mu(2n\mu^2 + 3\sigma^2)$

(B) $E(S_n^3) = n\mu(n^2\mu^2 + 3\sigma^2)$

(C) $E(S_n^3) = n^2\mu(n\mu^2 + 3\sigma^2)$

(D) $E(S_n^3) = n^2\mu(n\mu^2 + 2\sigma^2)$

(E) Podane informacje nie wystarczają do obliczenia $E(S_n^3)$

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne losowe $X_1,...,X_{10}$ są niezależne i mają rozkłady normalne. Zmienna X_i ma rozkład $N\left(\mu, \frac{1}{i}\right)$, innymi słowy $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \frac{1}{i}$ dla $i = 1,...,10$.
Wartość oczekiwana μ (jednakowa dla wszystkich zmiennych) jest nieznana. Należy zbudować przedział ufności dla μ na poziomie $1-\alpha = 0.95$. Przedział ma być postaci $[\hat{\mu} - d, \hat{\mu} + d]$, gdzie $\hat{\mu}$ jest *estymatorem największej wiarogodności* parametru μ.

Podaj liczbę d taką, że

$$\Pr(\hat{\mu} - d \le \mu \le \hat{\mu} + d) = 0.95.$$

(A) $d = 2.6429$

(B) $d = 0.3920$

(C) $d = 0.1960$

(D) $d = 0.3354$

(E) $d = 0.2643$

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ. Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią,

$$Y_i = \min(X_i, c), \qquad Z_i = X_i - Y_i,$$

$$S^{(Y)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \qquad S^{(Z)} = \sum_{i=1}^{N} Z_i.$$

Oblicz $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right)$.

(A) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = c\mu\lambda\, e^{-c/\mu}$

(B) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = c\mu\lambda\, (1 - e^{-c/\mu})$

(C) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = c\lambda\, e^{-c/\mu}$

(D) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = c\mu\, e^{-c\lambda}$

(E) $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right) = \mu\lambda\, e^{-c/\mu}$

Zadanie 6. Załóżmy, że $X_1,...,X_m,...$ jest ciągiem niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o gęstości

(*) $$f(x) = x\exp(-x) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Niech $S_0 = 0$ i $S_m = X_1 + ... + X_m$ dla $m > 0$. Określmy zmienną losową M w następujący sposób:

$$M = \max\{m \geq 0 : S_m \leq 5\}$$

Oblicz $\Pr(M = 2)$.

Wskazówka: M jest liczbą wyrazów rosnącego ciągu sum

$$X_1 < X_1 + X_2 < X_1 + X_2 + X_3 < ...$$

zawartych w przedziale $[0,5]$. Rozkład określony wzorem (*) jest rozkładem Gamma. Zmienną losową X_i można przedstawić jako *sumę dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym.*

(A) $\frac{25}{12}e^{-1}$

(B) $\frac{625}{12}e^{-5}$

(C) $\frac{625}{24}e^{-5}$

(D) $\frac{25}{12}e^{-5}$

(E) $\frac{25}{12}e^{-2}$

Zadanie 7. Niech $N_1, N_2, ..., N_{10}$ będzie próbką z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem λ (parametr jest wartością oczekiwaną pojedynczej obserwacji, $\lambda = E_\lambda(N_i)$).

Interesuje nas drugi moment obserwacji, czyli wielkość $m_2(\lambda) = E_\lambda(N_i^2)$. Chcemy skonstruować taki estymator wielkości $m_2(\lambda)$, który jest *nieobciążony* i który jest funkcją zmiennej $S = N_1 + ... + N_{10}$ (zależy *tylko od sumy* obserwacji).

(A) $\hat{m}_2 = \frac{1}{100} S^2$ jest estymatorem o żądanych własnościach

(B) $\hat{m}_2 = \frac{1}{100} S^2 - \frac{1}{10} S$ jest estymatorem o żądanych własnościach

(C) $\hat{m}_2 = \frac{1}{100} S(S+9)$ jest estymatorem o żądanych własnościach

(D) $\hat{m}_2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} N_i^2$ jest estymatorem o żądanych własnościach, ponieważ jest nieobciążony i można go przedstawić w postaci wzoru zawierającego tylko zmienną S

(E) Estymator o żądanych własnościach nie istnieje

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, stanowiącym łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Niech $Z_1, Z_2, ..., Z_n, ...$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\Pr(Z_i = 1) = 0.9 \text{ i } \Pr(Z_i = 0) = 0.1 .$$

Obserwujemy zmienne $Y_i = Z_i \cdot X_i$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1})$.

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1}) = 0.45$

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1}) = 0.40$

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1}) = 0.10$

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1}) = 0.126$

(E) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > Y_{n+1}) = 0.09$

Zadanie 9. Próbka $X_1, X_2, ..., X_n$ pochodzi z rozkładu normalnego $N(\mu, 1)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i wariancją 1. Na podstawie tej próbki zbudowano w standardowy sposób przedział ufności na poziomie 0.95 dla μ:

$$\left[\overline{X} - 1.96/\sqrt{n}\ ,\ \overline{X} + 1.96/\sqrt{n}\right] = \left[\hat{\mu}_-, \hat{\mu}_+\right].$$

Chcemy wykorzystać skonstruowany przedział do przeprowadzenia testu pewnej hipotezy statystycznej. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 3$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu > 3$ na poziomie istotności 0.025 odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\hat{\mu}_- > 3$

(B) Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 3$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu > 3$ na poziomie istotności 0.05 odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\hat{\mu}_- > 3$

(C) Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 3$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu > 3$ na poziomie istotności 0.025 odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\hat{\mu}_+ > 3$

(D) Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 3$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu \neq 3$ na poziomie istotności 0.05 odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy gdy ($\hat{\mu}_- > 3$ lub $\hat{\mu}_+ < 3$).

(E) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

Zadanie 10. Załóżmy, że $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zmienna losowa N jest niezależna od $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ i ma rozkład geometryczny dany wzorem:

$$\Pr(N = n) = p(1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,...$$

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przy tym $S_0 = 0$, zgodnie z konwencją).

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(N = 1 \mid S_N = s)$, dla $s > 0$.

Wskazówka: Warunkowo, dla $N > 0$, zmienna losowa S_N ma rozkład *wykładniczy*, którego wartość oczekiwaną można łatwo obliczyć znając $E(S_N) = E(S_N \mid N > 0) \Pr(N > 0)$.

(A) $\Pr(N = 1 \mid S_N = s) = 1 - s \exp[-s(1-p)/\mu]$

(B) $\Pr(N = 1 \mid S_N = s) = s \exp[-s(1-p)/\mu]$

(C) $\Pr(N = 1 \mid S_N = s) = \exp[-s(1-p)/\mu]$

(D) $\Pr(N = 1 \mid S_N = s) = 1 - \exp[-s(1-p)/\mu]$

(E) $\Pr(N = 1 \mid S_N = s) = \exp[-sp/\mu]$

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 stycznia 2003 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	C	
4	E	
5	A	
6	B	
7	C	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.