Zadanie 1

Rozważmy następującą, uproszczoną wersję gry w „wojnę''. Talia składa się z 52 kart. Dobrze potasowane karty rozdajemy dwóm graczom, każdemu po 26 i układamy w dwie kupki. Gracze wykładają kolejno po jednej karcie z wierzchu swojej kupki i sprawdzają wysokość obu kart. Jeśli obie wyłożone karty są równej wysokości (dwa asy lub dwa króle itd.) to mówimy, że następuje wojna. Po sprawdzeniu, obie karty odkładamy na bok i nie biorą już one udziału w dalszej grze. Powtarzamy tę procedurę 26 razy; gra kończy się, gdy obaj gracze wyłożą wszystkie karty.

Oblicz wartość oczekiwaną liczby wojen.

(A) $\frac{26}{17}$

(B) $\frac{52}{17}$

(C) 4

(D) $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4^4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}$

(E) $\frac{13}{52} + \frac{12}{51} + \frac{11}{50} + \ldots + \frac{2}{41} + \frac{1}{40}$

Zadanie 2
Niech W_1, W_2, W_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(w) = \begin{cases} \lambda\ e^{-\lambda w} & dla\ \ w \geq 0; \\ 0 \quad dla\ w < 0. \end{cases}$$

Oblicz medianę zmiennej losowej

$$\frac{W_1}{W_2 + W_3}.$$

(A) $med = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$

(B) $med = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $med = \sqrt{2} - 1$

(D) $med = \dfrac{2}{3}$

(E) $med = \dfrac{1}{2}$

Zadanie 3
Załóżmy, że K oznacza liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego z nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu θ, czyli

$$\Pr(K = k) = \binom{n}{k}\theta^k (1-\theta)^{n-k}.$$

Rozważmy estymator parametru θ postaci

$$\hat{\theta} = \frac{a+K}{b+n}.$$

Niech $n = 16$. Przypuśćmy, że dodatnie liczby a i b dobrane zostały tak, że funkcja ryzyka estymatora,

$$R(\theta) = E_\theta[(\hat{\theta}-\theta)^2]$$

jest funkcją stałą, czyli $R(\theta) = R$ dla każdej wartości parametru θ.

Jeśli stwierdzisz, że a i b można tak dobrać, podaj liczbę R.

(A) $R = \frac{1}{64}$

(B) $R = \frac{1}{16}$

(C) $R = \frac{1}{100}$

(D) nie istnieją takie liczby a i b dla których ryzyko jest stałe

(E) $R = \frac{1}{4}$

Zadanie 4

Wiemy, że zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_m, ..., X_n$ są niezależne i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa. Zakładamy, że $1 < m < n$ i znamy $Var(X_i) = \sigma^2$. Niech $S_m = X_1 + X_2 + ... + X_m$ i. $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_m + ... + X_n$.

Oblicz $E\ Var(S_m \mid S_n)$.

(A) $E\ Var(S_m \mid S_n) = \frac{m}{n}\sigma^2$

(B) $E\ Var(S_m \mid S_n) = \frac{m}{n+1}\sigma^2$

(C) podane informacje nie wystarczają do obliczenia $E\ Var(S_m \mid S_n)$

(D) $E\ Var(S_m \mid S_n) = m\frac{n-1}{n}\sigma^2$

(E) $E\ Var(S_m \mid S_n) = m\frac{n-m}{n}\sigma^2$

Zadanie 5
Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym, $E(X) = E(Y) = 0$, $Var(X) = Var(Y) = 1$ i $Cov(X, Y) = \rho$.

Oblicz $Var(XY)$.

(A) $Var(XY) = 1 + \rho^2$

(B) $Var(XY) = 1 + 2\rho^2$

(C) $Var(XY) = 1 - \rho^2$

(D) $Var(XY) = 1$

(E) $Var(XY) = (1 + \rho^2)^2$

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1,...,X_4$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,1)$, zaś $Y_1,...,Y_9$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,2^2)$. Niech

$\overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$ będzie średnią z pierwszej próbki;

$\overline{Y} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} Y_i$ będzie średnią z drugiej próbki.

(Wariancja jest dla obu próbek znana, zaś μ jest nieznane).

Znajdź takie liczby r i d, żeby przedział

$$[r\,\overline{X} + (1-r)\overline{Y} - d, \quad r\overline{X} + (1-r)\overline{Y} + d]$$

był przedziałem ufności dla μ na poziomie ufności $1-\alpha = 0.95$ i przy tym długość tego przedziału ($2d$) była najmniejsza.

(A) $r = 0.47, \ d = 0.980$

(B) $r = 0.69, \ d = 1.022$

(C) $r = 0.50, \ d = 0.888$

(D) $r = 0.53, \ d = 1.960$

(E) $r = 0.64, \ d = 0.784$

Zadanie 7
Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^\theta} & dla \;\; x \ge 1; \\ \\ 0 \quad dla \; x < 1. \end{cases}$$

Przyjmując bayesowski punkt widzenia, przyjmujemy, że nieznany parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie *a priori* wykładniczym, z gęstością

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \lambda \; e^{-\lambda\theta} & dla \;\; \theta \ge 0; \\ 0 \quad dla \; \theta < 0. \end{cases}$$

Oblicz bayesowski estymator parametru θ, czyli wartość oczekiwaną *a posteriori:*

$$\hat{\theta} = E(\theta \mid X_1, ..., X_n) .$$

(A) $\hat{\theta} = \dfrac{n+1}{\sum \ln X_i + \lambda}$

(B) $\hat{\theta} = \dfrac{\sum \ln X_i + \lambda}{n}$

(C) $\hat{\theta} = \dfrac{n+1}{\sum X_i + \lambda}$

(D) $\hat{\theta} = \dfrac{n+\lambda}{1 + \sum \ln X_i}$

(E) $\hat{\theta} = \dfrac{n+\lambda}{\sum X_i + \lambda}$

Zadanie 8

Niech $\chi^2_{0.1}(n)$ oznacza kwantyl rzędu 0.1 rozkładu chi-kwadrat z n stopniami swobody (liczbę, od której zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat jest mniejsza z prawdopodobieństwem 0.1).

Oblicz

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^2_{0.1}(n) - n}{\sqrt{n}}.$$

(z dokładnością do 0.01).

(A) $g = 1.81$

(B) $g = -1.28$

(C) $g = -1.81$

(D) $g = -2.56$

(E) granica nie istnieje

Zadanie 9
Niech $X_1,...,X_{10}$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \textit{dla } 0 < x < 1; \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta > 1$ na poziomie istotności $\alpha = 0.01$. Dla jakich wartości parametru θ ten test ma moc nie mniejszą, niż 0.99 ?

(Podaj wynik z dokładnością do 0.01).

(A) moc ≥ 0.99 wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta \geq 4.55$

(B) moc ≥ 0.99 wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta \geq 9.07$

(C) nie istnieje takie $\theta > 1$, dla którego test ma moc ≥ 0.99

(D) moc ≥ 0.99 wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta \geq 4.61$

(E) moc ≥ 0.99 wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta \geq 8.09$

Zadanie 10
Rozważmy następujący schemat urnowy:

W każdej z 10 urn znajdują się 2 kule, oznaczone liczbami:

- W urnie 1 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 1,
- w urnie 2 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 2,
- ....
- w urnie 10 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 10.

Losujemy kulę z urny 1 i przekładamy ją do urny 2. Następnie (po wymieszaniu kul) losujemy kulę z urny 2 i przekładamy do urny 3, itd., kulę wylosowaną z urny 9 przekładamy do urny 10, wreszcie losujemy kulę z urny 10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta ostatnia wylosowana kula ma numer większy, niż 6 ?

(A) $\frac{7}{10}$

(B) $\frac{80}{81}$

(C) $\frac{7}{11}$

(D) $\frac{241}{243}$

(E) $\frac{77}{81}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 października 2002 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	C	
4	E	
5	A	
6	E	
7	A	
8	C	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.