Zadanie 1.
Niech T będzie czasem likwidacji szkody, mierzonym w taki sposób, że $T = 0$ gdy szkodę zlikwidowano w ciągu tego samego roku, w którym do niej doszło, $T = 1$ jeśli w ciągu następnego roku, $T = 2$ jeśli jeszcze w następnym roku itd. W tabeli poniżej podany jest rozkład zmiennej T. W tej samej tabeli podane są warunkowe oczekiwane wartości szkody (między wartością szkody Y a czasem jej likwidacji T występuje dodatnia zależność).

j	0	1	2	3
$\Pr(T = j)$	0.4	0.3	0.2	0.1
$E(Y/T = j)$	10	15	20	30

Ani T, ani Y nie zależą od tego, w którym roku kalendarzowym do szkody doszło.

Niech n_t oznacza ilość szkód, które zaszły w ciągu roku t. Mamy dane na ten temat z roku t_0 oraz kilku lat poprzednich:

t	t_0	$t_0 - 1$	$t_0 - 2$	$t_0 - 3$
n_t	100	80	60	40

Oznaczmy literami A i B następujące zdarzenia:

- A - szkoda, wylosowana ze zbioru szkód do których doszło w latach od $t_0 - 3$ do t_0 włącznie, na koniec roku t_0 oczekuje jeszcze na likwidację,
- B - szkoda, wylosowana ze zbioru szkód do których doszło w latach od $t_0 - 3$ do t_0 włącznie, została zlikwidowana w ciągu roku t_0

Stosunek warunkowych wartości oczekiwanych $\frac{E(Y/A)}{E(Y/B)}$ wynosi:

(A) 1.00

(B) 1.17

(C) 1.33

(D) 1.50

(E) 1.67

Zadanie 2.
Rozkład warunkowy dwóch ryzyk X i Y przy danej wartości parametru ryzyka Z ma następujące charakterystyki:

$$COV(X, Y / Z) = 2Z \quad ,$$
$$E(X / Z) = 3Z \quad ,$$
$$E(Y / Z) = Z \quad ;$$

podczas gdy zróżnicowanie parametru Z w populacji ryzyk daje się opisać rozkładem logarytmiczno-normalnym takim, że $\ln(Z)$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \sigma^2) = \left(0, \quad \frac{1}{10}\right)$.

$COV(X, Y)$ wynosi w przybliżeniu (wybierz najbliższą odpowiedź):

(A) 2.00

(B) 2.15

(C) 2.30

(D) 2.45

(E) 2.50

Zadanie 3.

Zmienna losowa:

$S = Y_1 + ... + Y_N$, (przyjmujemy $S = 0$ jeżeli $N = 0$)

ma złożony rozkład geometryczny:

$$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,...$$

W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika Y. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,...,5$ prawdopodobieństwa $\Pr(S = k)$.

k	$\Pr(Y = k)$	$\Pr(S = k)$
0	0	0.50000
1	0.2	0.05000
2	0.3	0.08000
3	0.1	0.04050
4	0.2	0.06855
5	0.1	0.04693
6	0.1	?

$\Pr(S = 6)$ wynosi w przybliżeniu (wybierz najbliższą odpowiedź):

(A) 0.0425

(B) 0.0450

(C) 0.0475

(D) 0.0500

(E) 0.0525

Zadanie 4.
Decydent maksymalizuje oczekiwaną wartość funkcji użyteczności postaci:

$$u(x) = const - \exp(-x)$$

Jego wyjściowy majątek wynosi $w = 1$, narażony jest on jednak na ryzyko X:

$$\Pr(X = 1) = 1 - \Pr(X = 0) = \frac{1}{5}$$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje wszystkie kontrakty pokrycia nadwyżki ryzyka X ponad kwotę $d \in [0, 1]$ za cenę:

$$P(d) = \frac{5}{4} \cdot E[(X - d)_+]$$

Wartość d^* parametru kontraktu d, przy której oczekiwana użyteczność osiąga maksimum, wynosi:

(A) $d^* = 0$

(B) $d^* = \ln\frac{3}{2}$

(C) $d^* = \ln\frac{4}{3}$

(D) $d^* = \ln\frac{5}{4}$

(E) $d^* = 1$ (brak ubezpieczenia)

Zadanie 5.

W momencie t_0 wiemy o pewnym ryzyku, iż generuje ono szkody zgodnie z procesem Poissona (λt), a o parametrze λ zakładamy a priori iż jest realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma(α, β), danym na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\lambda),$$

z parametrami: $\alpha = 2$, $\beta = 10$.

Rozpoczęliśmy obserwację procesu w momencie t_0, i prowadziliśmy ją do momentu t_1 wystąpienia pierwszej szkody. Warunkowa wartość oczekiwana zmiennej Λ pod warunkiem iż $t_1 = t_0 + 2$, wynosi:

(A) $\frac{6}{24}$

(B) $\frac{6}{25}$

(C) $\frac{5}{24}$

(D) $\frac{5}{25}$

(E) $\frac{4}{24}$

Zadanie 6.

Przy danej wartości parametru ryzyka Λ łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka ma złożony rozkład Poissona z parametrami $\left(\Lambda, F_{Y/\Lambda}(\cdot)\right)$, a warunkowa wartość oczekiwana pojedynczej szkody Y dana jest wzorem:

$E(Y|\Lambda) = 10 \cdot (1 + 2 \cdot \Lambda)$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład Gamma(α, β), dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\lambda),$$

z parametrami: $\alpha = 4$, $\beta = 20$.

$E(X)$ wynosi:

(A) 2.80

(B) 2.85

(C) 2.90

(D) 2.95

(E) 3.00

Zadanie 7.

Łączna wartość odszkodowań za szkody zaistniałe w danym roku składa się z dwóch komponentów:

X_0 - łącznej wartości odszkodowań wypłacanych w ciągu tego samego roku

X_1 - łącznej wartości odszkodowań do wypłacenia w latach następnych.

Przyjmujemy następujące założenia:

- o warunkowym rozkładzie ww. zmiennych przy danej wartości parametru ryzyka Λ:

$E(X_0/\Lambda) = \Lambda \cdot m_1 \cdot p \qquad VAR(X_0/\Lambda) = \Lambda \cdot m_2 \cdot p$

$E(X_1/\Lambda) = \Lambda \cdot m_1 \cdot q, \qquad VAR(X_1/\Lambda) = \Lambda \cdot m_2 \cdot q, \qquad COV(X_0, X_1/\Lambda) = 0$

- oraz o bezwarunkowym rozkładzie parametru ryzyka Λ:

$E(\Lambda) = \overline{\Lambda}, \qquad VAR(\Lambda) = L^2$

oraz iż znamy wartości parametru $1 - q = p \in (0,1)$ oraz (dodatnich) parametrów m_1, m_2, $\overline{\Lambda}$ oraz L^2.

Po zaobserwowaniu wartości zmiennej X_0 przeprowadzamy predykcję zmiennej X_1 za pomocą najlepszego liniowego predyktora postaci:

$$BLP(X_1/X_0) = q \cdot \left(z \cdot \frac{1}{p} \cdot X_0 + (1-z) \cdot \overline{\Lambda} \cdot m_1 \right).$$

Współczynnik z zapewniający, iż predyktor jest rzeczywiście najlepszy wśród liniowych, jest postaci:

(A) $z = \dfrac{L^2 \cdot p \cdot m_1^2}{L^2 \cdot p \cdot m_1^2 + \overline{\Lambda} \cdot m_2}$

(B) $z = \dfrac{L^2 \cdot p \cdot m_2}{L^2 \cdot p \cdot m_2 + \overline{\Lambda} \cdot m_1^2}$

(C) $z = \dfrac{L^2 \cdot m_1^2}{L^2 \cdot m_1^2 + \overline{\Lambda} \cdot p \cdot m_2}$

(D) $z = \dfrac{L^2 \cdot m_2}{L^2 \cdot m_2 + \overline{\Lambda}^2 \cdot p \cdot m_1^2}$

(E) $z = \dfrac{L^2 \cdot p \cdot m_2}{L^2 \cdot p \cdot m_2 + \overline{\Lambda}^2 \cdot m_1^2}$

Zadanie 8.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie (w skrócie: rozkładzie zmiennej losowej *W*).

Wyznaczamy składkę c za portfel ryzyk generujący łączną wartość szkód *W* przyjmując dla uproszczenia, iż prawdopodobieństwo ruiny ε spełnia równość $\varepsilon = \exp(-Ru)$, gdzie *R* to *adjustment coefficient*, zaś *u* to nadwyżka początkowa.

Przyjmujemy, iż zmienna *W* posiada funkcję generującą momenty, oraz że charakteryzuje się dodatnią (i niepomijalną) skośnością γ_W, natomiast wyrazy wyższych rzędów w rozwinięciu logarytmu funkcji generującej momenty są pomijalne.
Przyjmujemy także konkretne założenia liczbowe:
- nadwyżka początkowa jest równa dwukrotności odchylenia standardowego zmiennej *W*: $u = 2\sigma_W$,
- przyjęty poziom bezpieczeństwa wynosi: $\varepsilon = \exp(-3)$

W rezultacie otrzymujemy formułę składki:

$$c = E(W) + \sigma_W \cdot (a_0 + a_1 \cdot \gamma_W)$$

parametr a_1 formuły wynosi:

(A) $a_1 = \frac{3}{2}$

(B) $a_1 = \frac{3}{8}$

(C) $a_1 = \frac{9}{8}$

(D) $a_1 = \frac{3}{4}$

(E) $a_1 = \frac{9}{16}$

Zadanie 9.
Wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład Pareto dany dystrybuantą:

$$F_Y(y) = 1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^3 \quad \text{dla} \quad y \geq 0, \qquad \text{oraz} \qquad F_Y(y) = 0 \ \text{dla} \ y < 0.$$

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela $U(t)$ w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi:
$c = \frac{5}{4} \cdot \lambda \cdot E(Y)$.
Przyjmujemy iż nadwyżka początkowa jest zerowa.
Niech $T = \inf\{t: \quad t \geq 0, U(t) < 0\}$ oznacza moment czasu, w którym dochodzi do ruiny (przyjmujemy $T = \infty$ jeśli dla dowolnego $t \geq 0$ nadwyżka jest nieujemna).

Niech funkcja:
$G(h) = \Pr((T < \infty) \wedge (U(T) < -h)), \qquad h \geq 0$
określa prawdopodobieństwo zdarzenia, iż do ruiny dojdzie, i że deficyt w momencie ruiny przekroczy wartość *h*.
Wartość $G(2)$ wynosi:

(A) 2/3

(B) 3/5

(C) 5/9

(D) 1/2

(E) 4/9

Zadanie 10.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie (w skrócie: rozkładzie zmiennej losowej *W*) takich, że $\Pr(W \geq 0) = 1$.

Załóżmy, że $c < E(W) < \infty$. Wobec tego ruina jest pewna.

Niech $T(u)$ oznacza czas ruiny:
$T(u) = \inf\{n: \quad n \in \{0,1,2,...\}, \quad U_n < 0\}$,
zaś $E(T(u))$ oczekiwany czas ruiny (traktowany explicite jako funkcja zmiennej *u*). Oczywiście dla ujemnych wartości *u* zachodzi $E(T(u)) = 0$.
Dla nieujemnych wartości *u* funkcja $E(T(u))$ spełnia tożsamość całkową:

(A) $E(T(u)) = \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(B) $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(C) $E(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(D) $E(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + F_W(u+c) \cdot \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(E) $E(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + F_W(u+c) \cdot \int_0^{u+c} [1 + E(T(u+c-x))]dF_W(x)$

Wskazówka: Rozważ dwa rozłączne zdarzenia: $U_1 < 0$ oraz $U_1 \geq 0$

XXV Egzamin dla Aktuariuszy z 13 kwietnia 2002 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	E	
4	C	
5	A	
6	E	
7	A	
8	B	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.