Zadanie 1.

W urnie znajduje się początkowo b_0 kul białych i $m - b_0$ kul czarnych. Powtarzamy n-krotnie następujące czynności:

1. losujemy 1 kulę, *nie zwracając* jej do urny;
2. wrzucamy do urny 1 *białą* kulę.

Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli w kolejnym, $(n+1)$-szym ciągnieniu.

(A) $p_n = 1 - (1 - b_0 / m)^{n+1}$

(B) $p_n = 1 - (1 - b_0 / m)(1 - 1/m)^n$

(C) $p_n = (n + b_0)/(m + n)$

(D) $p_n = b_0 / m + [(m - b_0)/m][n/(n+m)]$

(E) $p_n = 1 - (m - b_0)/(m + n^2)$

Zadanie 2.

Niech $X = N \cdot \exp(tZ)$, gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ, Z jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, niezależną od N, t jest stałą. Oblicz

$$\frac{Var(X)}{(E(X))^2}.$$

(A) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2)$

(B) $\lambda \exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$

(C) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$

(D) $\frac{1}{\lambda}\exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2}) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$

(E) $\frac{1}{\lambda}\exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2}) - 1$

Zadanie 3.

Załóżmy, że $X_1, X_2, ..., X_9$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Pan Ixiński miał podać przedział ufności dla μ na poziomie $1-\alpha = 0.95$, ale nie znalazł tablic rozkładu t-Studenta. Ponieważ miał tablice rozkładu normalnego i χ^2, więc poradził sobie tak:

1. najpierw obliczył w standardowy sposób jednostronny przedział ufności $\left[0, \overline{\sigma}^2\right]$ dla wariancji, na poziomie $1-\alpha = 0.95$;

2. następnie przyjął, że $\left[\overline{X} - \frac{1.96\overline{\sigma}}{\sqrt{9}}, \overline{X} + \frac{1.96\overline{\sigma}}{\sqrt{9}}\right]$ jest potrzebnym przedziałem dla wartości oczekiwanej, gdzie $\overline{\sigma}$ zostało wyznaczone w punkcie 1.

Oblicz faktyczny poziom ufności

$$p = \Pr\left(\overline{X} - \frac{1.96\overline{\sigma}}{\sqrt{9}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{1.96\overline{\sigma}}{\sqrt{9}}\right).$$

(A) $p = (1-\alpha)^2 \approx 0.9$

(B) $p = 1-\alpha^2 \approx 0.9975$

(C) $p = 1-\alpha \approx 0.95$, jak chciał Ixiński

(D) prawdopodobieństwo pokrycia p nie jest jednakowe dla wszystkich wartości nieznanych parametrów

(E) $p \approx 0.99$

Zadanie 4.

Niech W_1 i W_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(w) = \lambda e^{-\lambda w}$, dla $w > 0$. Oblicz granicę prawdopodobieństwa warunkowego:

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\left(\min(W_1, W_2) > \frac{t}{2} \middle| W_1 + W_2 > t \right).$$

(A) 1/3

(B) 1/ 2

(C) 1

(D) $\lambda/(1+\lambda)$

(E) 0

Zadanie 5.

Wiemy, że $Y = 2X + W$, gdzie X i W są niezależnymi zmiennymi losowymi, X ma rozkład normalny $N(0,3^2)$ i W ma rozkład normalny $N(0,2^2)$. Jeśli zachodzi związek $X = \alpha Y + U$ i zmienne Y i U są niezależne, to

(A) $\alpha = 1/2$

(B) $\alpha = 9/20$

(C) $\alpha = 1$

(D) $\alpha = 0$

(E) $\alpha = -1/2$

Zadanie 6.

Rozważmy ciąg $X_1,\dots,X_n,\dots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Niech

$$S_n = X_1X_2 + X_2X_3 + \dots + X_{n-1}X_n + X_nX_{n+1}$$

Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) nie istnieje ciąg liczb c_n taki, że $\lim_{n\to\infty} \Pr(S_n / c_n \le a) = \Phi(a)$ dla każdego a

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(S_n / \sqrt{n} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr(S_n / n \le a) = \Phi(a)$ dla każdego a

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(S_n / \sqrt{2n} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a

(E) $\Pr\left(S_n / \sqrt{n} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a i dla każdego n

Φ oznacza tu dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Wskazówka: Jeśli z sumy S_{10000} usuniemy co setny wyraz, to otrzymamy sumę 100 *niezależnych* zmiennych losowych.

Zadanie 7.

Rozważmy losową liczbę zmiennych losowych $X_1,...X_N$. Zakładamy, że zmienne X_i są wzajemnie niezależne i niezależne od zmiennej losowej N. Wiemy, że każda ze zmiennych X_i ma jednakowy rozkład wykładniczy o gęstości $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, dla $x > 0$. Zmienna N ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zarówno $\lambda > 0$ jak i $\alpha > 0$ są nieznane.

Obserwujemy *tylko* te spośród zmiennych $X_1,...X_N$, które *przekraczają* wartość 10. Nie wiemy, ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości.

Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy 5 wartości większych od 10:

$$15,\ 23,\ 11,\ 32,\ 19.$$

Na podstawie tych danych oblicz *estymatory największej wiarogodności* parametrów λ i α.

(A) $\hat{\lambda} = 5e$, $\hat{\alpha} = 0.1$

(B) $\hat{\lambda} = 5e$, $\hat{\alpha} = 0.05$

(C) $\hat{\lambda} = 5$, $\hat{\alpha} = 0.2$

(D) $\hat{\lambda} = 50$, $\hat{\alpha} = (\ln 10)/50$

(E) $\hat{\lambda} = 10$, $\hat{\alpha} = e^{-2}$

Zadanie 8.

Niech K będzie zmienną losową taką, że $\Pr(K = k) = 1/10$ dla $k = 1,2,...,10$. Niech

$$X_k = \begin{cases} 1 & gdy\ \ K = k; \\ 0 & gdy\ \ K \neq k. \end{cases} \qquad S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

Oblicz $Cov(X_1, S_5)$.

(A) $Cov(X_1, S_5) = 1/5$

(B) $Cov(X_1, S_5) = 1/10$

(C) $Cov(X_1, S_5) = 0$

(D) $Cov(X_1, S_5) = -1/20$

(E) $Cov(X_1, S_5) = 1/20$

Zadanie 9.

Niech $X_1,...,X_n,X_{n+1},...,X_m$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Obserwujemy zmienne $X_1,...,X_n$ i ponadto znamy średnią wszystkich zmiennych: $\bar{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$. Znajdź stałą $c_{n,m}$ taką, żeby statystyka

$$\frac{1}{c_{n,m}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_m)^2$$

była nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.

(A) $c_{n,m} = n[1-2/(m+n)]$

(B) $c_{n,m} = m-1$

(C) $c_{n,m} = n-1+(m-n)^2/m^2$

(D) $c_{n,m} = n\left(1-\frac{1}{m}\right)$

(E) $c_{n,m} = n-1+1/n-1/m$

Zadanie 10.

Zmienne losowe $X_1,...X_9$ są wzajemnie niezależne, X_i ma rozkład normalny $N\left(\mu\sqrt{i},1\right)$ dla $i=1,2,...,9$. Rozważamy hipotezy statystyczne

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{i} \quad H_1 : \mu > 0.$$

Chcemy zbudować test jednostajnie najmocniejszy (TJNM) hipotezy zerowej H_0 przeciw alternatywie H_1 na poziomie istotności $\alpha = 0.025$.

(A) TJNM nie istnieje

(B) TJNM odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{9} X_i^2 / i > 19.0228$

(C) TJNM odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{9} X_i > 5.88$

(D) TJNM odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{9} i\, X_i > 1.96\sqrt{285}$

(E) TJNM odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{9} \sqrt{i}\, X_i > 1.96\sqrt{45}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2001 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	E	
4	E	
5	B	
6	B	
7	A	
8	E	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.