Zadanie 1.
Niech T będzie czasem likwidacji szkody, mierzonym w taki sposób, że $T = 0$ gdy szkodę zlikwidowano w ciągu tego samego roku, w którym do niej doszło, $T = 1$ jeśli w ciągu następnego roku, $T = 2$ jeśli jeszcze w następnym roku itd. W tabeli poniżej podany jest rozkład zmiennej T.

j	0	1	2	3	4
$\Pr(T = j)$	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1

Niech n_t oznacza ilość szkód, które zaszły w ciągu okresu t. Mamy dane na ten temat z okresu t_0 oraz kilku okresów poprzednich:

t	t_0	$t_0 - 1$	$t_0 - 2$	$t_0 - 3$	$t_0 - 4$
n_t	700	700	600	400	200

Oznaczmy przez A zdarzenie, iż szkoda, wylosowana ze zbioru szkód z lat od $t_0 - 4$ do t_0 włącznie, została zlikwidowana w ciągu okresu t_0.

Warunkowa wartość oczekiwana $E(T/A)$ wynosi:

(A) 1.000

(B) 1.200

(C) 1.333

(D) 1.425

(E) 1.500

Zadanie 2.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym składka należna za rok wynosi 4, a rozkład łącznej wartości szkód za *n*-ty rok W_n dany jest dla każdego *n* wzorem:

$$\Pr(W_n = k) = (k+1)\cdot p^2 \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $p = q = \frac{1}{2}$,

a zmienne $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.
W tym modelu współczynnik przystosowania (*adjustment copefficient*) *R* wynosi:

(A) $\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

(B) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\ln\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$

(D) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(E) $\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)$

Zadanie 3.
Wartość szkody Y jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 10)$.
Wariancja nadwyżki szkody ponad 5, czyli wariancja zmiennej X zdefiniowanej jako:
$X = (Y - 5)_+$
wynosi:

(A) 25/6

(B) 25/16

(C) 125/48

(D) 125/36

(E) 125/24

Zadanie 4.

Uproszczony model ubezpieczenia spłat kredytu zakłada pokrycie ryzyka niespłacenia pozostałej części długu. Polisa pokrywa okres spłat o długości *T*. Kredyt w kwocie *K* spłacany jest w formie renty ciągłej ze stałym natężeniem spłat przez okres $(0, T)$, wobec czego kwota pozostałego długu w momencie $t \in (0, T)$ wynosi:

$$balance(t) = K \cdot \frac{1 - \exp(-\delta \cdot (T - t))}{1 - \exp(-\delta \cdot T)},$$ gdzie δ to natężenie oprocentowania.

- Wartość szkody, o ile do niej dojdzie w momencie *t*, wynosi właśnie $balance(t)$.
- Prawdopodobieństwo zajścia szkody wynosi *q*, zaś rozkład warunkowy czasu zajścia szkody (pod warunkiem, że do niej dojdzie) jest rozkładem jednostajnym na $(0, T)$.

Oznaczmy przez *P* składkę przypisaną z tej polisy (po odjęciu od niej kosztów akwizycji), zaś przez *R* rezerwę składkową dla tej polisy, wyznaczoną zgodnie z ustawową zasadą „w proporcji do ryzyka” na moment sprawozdawczy $\frac{T}{2}$.

- Jeśli przyjmiemy wartości parametrów: $\delta = 20\%$ oraz $T = 5$ (*jednostką pomiaru czasu w obu przypadkach jest rok*)

to stosunek $\frac{R}{P}$ wyniesie z dobrym przybliżeniem:

(A) 50%

(B) 46%

(C) 41%

(D) 34%

(E) 29%

Zadanie 5.
Ilość szkód z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 20, zaś wartości kolejnych szkód są nawzajem niezależne (i niezależne od ilości) i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 100. Ubezpieczyciel pokrywa największą ze szkód (oznaczmy ją przez M). Oczywiście $M = 0$, jeśli przypadkiem żadna szkoda się nie zdarzy.
Znajdź x takie, że $\Pr(M > x) = 1 - \exp(-0.05)$
Z przybliżeniem do dziesięciu x wynosi:

(A) 700

(B) 600

(C) 500

(D) 400

(E) 300

Zadanie 6.
Ilość szkód z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 1/5, zaś wartości kolejnych szkód są nawzajem niezależne (i niezależne od ilości) i mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 100. Ubezpieczyciel pokrywa największą ze szkód (oznaczmy ją przez *M*). Oczywiście $M = 0$, jeśli przypadkiem żadna szkoda się nie zdarzy.
Z przybliżeniem do jednej dziesiątej składka netto $E(M)$ wynosi:

(A) 19.05

(B) 18.00

(C) 16.95

(D) 15.90

(E) 14.85

Wskazówka: dokładne rozwiązanie jest pracochłonne – można jednak wyeliminować niepoprawne odpowiedzi dokonując odpowiedniego oszacowania, korzystając z faktu, iż wartość oczekiwana ilości szkód jest niewielka

Zadanie 7.
Porównujemy wariancje dwóch zmiennych: S_1 i S_2.
Zmienna $S_1 = N_1 + N_2 + ... + N_{10}$ wyraża łączną ilość szkód z portfela liczącego 10 niezależnych ryzyk, gdzie każda ze zmiennych N_i ma rozkład dwumianowy o parametrach $(1, q_i)$, a prawdopodobieństwa zajścia szkody q_i są różne na tyle, że:

- $\sum_{i=1}^{10} (q_i - \overline{q})^2 = 1$, gdzie:
- $\overline{q} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} q_i$.

Zmienna S_2 ma przy danej wartości $Q = q$ warunkowy rozkład dwumianowy o parametrach $(10, q)$, zaś bezwarunkowy rozkład zmiennej Q ma wartość oczekiwaną równą $\overline{q}$ i wariancję równą $\frac{1}{10}$.
Różnica $VAR(S_2) - VAR(S_1)$ wynosi:

(A) 0

(B) 1

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Zadanie 8.

Zakładamy iż warunkowy rozkład ilości szkód N_t w roku t (przy danej wartości q parametru ryzyka Q) jest rozkładem dwumianowym $\mathrm{Bin}(1, q)$, zaś rozkład zmiennej Q w populacji ubezpieczonych jest rozkładem o postaci:

$\Pr(Q = 1) = 0.01$

$$f_Q(x) = 0.99 \cdot \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1) \cdot \Gamma(4)} \cdot (1 - x)^3 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, 1)$$

Masę prawdopodobieństwa (równą 0.01) w jedynce interpretujemy jako odpowiadającą przypadkowi trafienia na oszusta ubezpieczeniowego, zaś gęstość na przedziale $(0, 1)$ jako odpowiadającą przypadkowi uczciwego ubezpieczonego.

Wartość parametru ryzyka Q jest dla danego ubezpieczonego niezmienna w kolejnych latach, a zmienne N_t są warunkowo niezależne.

Prawdopodobieństwo zdarzenia „trafił nam się oszust” pod warunkiem iż ubezpieczony co rok miał szkodę w kolejnych trzech latach wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.261

(B) 0.231

(C) 0.200

(D) 0.165

(E) 0.132

Zadanie 9.
Dla pewnego ryzyka składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad d jest dla wszystkich d należących do zbioru $[1,\ 2]$ dana wzorem:

$$E\left[(X-d)_+\right]=\frac{2}{3}-d+\frac{1}{2}d^2-\frac{1}{12}d^3.$$

Zbiór wszystkich możliwych wartości $E(X)$ to przedział:

(A) $\left[\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{4},\ \frac{13}{12}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{3},\ \frac{13}{12}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$

(E) $\left[\frac{2}{3},\ \frac{13}{12}\right]$

Zadanie 10.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:
$U(t) = ct - S_{N(t)}$,
<u>z zerową nadwyżką początkową</u>, gdzie
ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu *t*,
$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:
Y_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 10]$.
Niech $T = \inf\{t > 0: \quad U(t) < 0\}$ będzie momentem ruiny.

Parametry procesu wynoszą: $c = 60$, $\lambda = 10$.

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny z deficytem w momencie ruiny przekraczającym kwotę 4:
$\Pr(T < \infty, \quad U(T) < -4)$
wynosi:

(A) 0.50

(B) 0.45

(C) 0.36

(D) 0.30

(E) 0.25

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2001 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	E	
5	B	
6	A	
7	E	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.