Zadanie 1.

Zdarzenia A, B, C są parami niezależne.
Czy następujące trzy dodatkowe warunki:

(I) $\Pr(A) = 0.7$, $\Pr(B) = 0.6$, $\Pr(C) = 0.5$, $\Pr(A \setminus (B \cap C)) = 0.49$

(II) $\Pr(B) = 0$

(III) Zdarzenia $A \cap C$ i $A \cap B$ są niezależne

są warunkami wystarczającymi na to, aby zachodziła także niezależność zespołowa zdarzeń A, B, C?
(wybierz odpowiedź najtrafniej charakteryzującą ww. warunki)

(A) tylko warunek (II) jest warunkiem wystarczającym

(B) warunki (II) i (III) (każdy z osobna) to warunki wystarczające

(C) warunki (I) i (III) (każdy z osobna) to warunki wystarczające

(D) warunki (I) i (II) (każdy z osobna) to warunki wystarczające

(E) każdy z trzech warunków jest warunkiem wystarczającym

Zadanie 2.

W urnie jest 5 kul białych i 10 kul czarnych. Losujemy po jednej kuli bez zwracania do momentu, aż wśród wylosowanych kul znajdą się kule obydwu kolorów. Jaka jest wartość oczekiwana ilości wylosowanych kul czarnych?

(A) $\frac{17}{9}$

(B) $\frac{13}{9}$

(C) 2

(D) $\frac{13}{6}$

(E) $\frac{7}{6}$

Zadanie 3.
Niezależne zmienne losowe X, Y mają identyczny rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ. Warunkowa wartość oczekiwana:
$E[\min\{X,Y\}|X+Y=M]$, gdzie M jest pewną dodatnią liczbą, wynosi:

(A) $\frac{6}{24}\cdot M$

(B) $\frac{7}{24}\cdot M$

(C) $\frac{8}{24}\cdot M$

(D) $\frac{9}{24}\cdot M$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest dobra, bo to zależy jeszcze od μ

Zadanie 4.
Skuteczność strzelca mierzymy prawdopodobieństwem trafienia w cel pojedynczym strzałem (w pewnych, odpowiednio wystandaryzowanych warunkach). W pewnej populacji strzelców (załóżmy dla uproszczenia, iż jest to populacja nieskończona), rozkład skuteczności jest jednostajny na przedziale $(0,1)$.

Wybieramy przypadkowego strzelca, który następnie oddaje 10 strzałów. Zakładamy, iż prawdopodobieństwo trafienia w kolejnej próbie nie zależy od wyniku prób poprzednich.
Okazuje się, że wybrany strzelec we wszystkich 10-ciu próbach trafił w cel. Prosimy go o oddanie 11-go strzału. Prawdopodobieństwo, iż i tym razem trafi, wynosi:

(A) $\frac{11}{12}$

(B) $\frac{10}{12}$

(C) $\frac{10}{11}$

(D) $\frac{12}{13}$

(E) $\frac{12}{14}$

Zadanie 5.

Zakładając, że $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ jest próbką prostą z rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \cdot e^{-x/\mu} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0 \end{cases}$$

przeprowadzono estymację parametru μ metodą największej wiarygodności, i otrzymano wartość estymatora $ENW(\mu)$ równą 50. Największa zaobserwowana w próbce wartość $\max_i \{X_i\}$ wyniosła 100, a dziewięć pozostałych było ściśle mniejszych od 100.

Okazało się jednak, że w istocie zaobserwowane przez nas wartości $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ stanowią próbkę z <u>uciętego</u> rozkładu wykładniczego:

$X_i = \min\{Y_i, 100\}$,

gdzie zmienne losowe Y_i pochodzą z rozkładu wykładniczego o gęstości f_μ. Wartość estymatora największej wiarygodności $ENW(\mu)$ po uwzględnieniu modyfikacji założeń wynosi:

(A) 60

(B) 55.555...

(C) 50

(D) 45

(E) podane informacje nie pozwalają obliczyć $ENW(\mu)$ przy zmodyfikowanych założeniach

Zadanie 6.
Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie jednostajnym na pewnym przedziale $(\theta_1, \ \theta_2)$. Współczynnik korelacji liniowej $Corr\left(\min_{i=1,\dots n}\{X_i\}, \ \max_{i=1,\dots n}\{X_i\}\right)$ wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{n}$

(C) $\frac{2}{n+1}$

(D) $\frac{n+1}{n^2+1}$

(E) $\frac{1}{n^2}$

Zadanie 7.

Przeprowadzamy wśród wylosowanych osób ankietę na delikatny temat. Ankietowana osoba rzuca kostką do gry, i w zależności od wyniku rzutu kostką (wyniku tego nie zna ankieter) podaje odpowiednio zakodowaną odpowiedź na pytanie:

„Czy zdarzyło się Panu/Pani w roku 1999 dać łapówkę w klasycznej formie pieniężnej, przekraczającą kwotę 100 zł?”

Przyjmijmy, iż interesująca nas cecha X przyjmuje wartości:

- $X = 1$ jeśli odpowiedź brzmi „TAK”,
- $X = 0$ jeśli odpowiedź brzmi „NIE”,

Pierwszych 100 osób udziela odpowiedzi $Z_1, \dots, Z_{100}$ zgodnie z regułą:

- Jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, 2, 3 lub 4 , to:
  $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 5 lub 6, to:
  $Z_i = 1 - X_i$

Następnych 100 osób udziela odpowiedzi $Z_{101}, \dots, Z_{200}$ zgodnie z regułą:

- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, lub 2 , to:
  $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 3, 4, 5 lub 6, to:
  $Z_i = 1 - X_i$

Dla uproszczenia zakładamy, że 200 ankietowanych osób to próba prosta z (hipotetycznej) populacji o nieskończonej liczebności, a podział na podpróby jest także całkowicie losowy. Interesujący nas parametr tej populacji to oczywiście:

$$q_X \doteq \Pr(X = 1)$$

W wyniku przeprowadzonej ankiety dysponujemy średnimi z podpróbek:

$$\overline{Z}_1 = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{100} Z_i , \qquad \overline{Z}_2 = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=101}^{200} Z_i$$

Estymator parametru q_X uzyskany Metodą Najwiekszej Wiarogodności:

$$\hat{q}_X = a_0 + a_1 \cdot \overline{Z}_1 + a_2 \cdot \overline{Z}_2$$

jest estymatorem nieobciążonym. Jego parametry liczbowe (a_0, a_1, a_2) wynoszą:

(A) $(a_0, a_1, a_2) = (0, -1, 2)$

(B) $(a_0, a_1, a_2) = (0, 2, -1)$

(C) $(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

(D) $(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(E) $(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{-1}{2}, 2\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

Zadanie 8.

Rozważmy dwie niezależne próbki proste:

$X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,n_1} \quad \sim \quad N(\mu, \sigma^2)$

$X_{2,1}, X_{2,2}, \dots, X_{2,n_2} \quad \sim \quad N(\mu, 2\sigma^2)$

Niech: $\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}$, $\quad \bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}$, $\quad$ oraz $\tilde{X} = \dfrac{n_1\bar{X}_1 + \frac{n_2}{2}\cdot\bar{X}_2}{n_1 + \frac{n_2}{2}}$

Estymator parametru σ^2 postaci:

$$S^2 = c\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1,i} - \tilde{X}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2,i} - \tilde{X}\right)^2\right\},$$

jest nieobciążony, jeśli stała c wynosi:

(A) $c = \dfrac{1}{n_1 + \frac{n_2}{2} - 1}$

(B) $c = \dfrac{1}{n_1 + \frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}}$

(C) $c = \dfrac{1}{n_1 + n_2 - 2}$

(D) $c = \dfrac{1}{n_1 + n_2}$

(E) $c = \dfrac{1}{n_1 + n_2 - 1}$

Zadanie 9.
Rozważamy zadanie testowania, na podstawie pojedynczej obserwacji X, hipotezy prostej:
H_0 : X pochodzi z rozkładu o gęstości f_0,
przeciwko prostej alternatywie:
H_1 : X pochodzi z rozkładu o gęstości f_1.
Wiadomo, że dla każdego $\alpha \in (0,1)$ najmocniejszy test na poziomie istotności α, o postaci:

- odrzucamy H_0 jeśli $X > k = k(\alpha)$,
- nie odrzucamy H_0 jeśli $X \le k = k(\alpha)$,

ma moc $(1-\beta)$ spełniającą zależność:
$1-\beta = 1-\beta(\alpha) = \alpha^2$.
Gęstość f_0 dana jest wzorem:

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0 \end{cases}$$

Wobec tego gęstość f_1 dana jest (dla dodatnich x) wzorem:

(A) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}$

(B) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^{3/2}}$

(C) $\dfrac{2}{(1+2x)^2}$

(D) $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$

(E) $\dfrac{2}{(1+x)^3}$

Zadanie 10.
Na podstawie próbki prostej $X_1, X_2, \dots, X_n$ z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznanymi parametrami μ i σ^2 budujemy przedział ufności $\left(\underline{\sigma^2},\ \overline{\sigma^2}\right)$ dla wariancji na poziomie ufności 0.95. Metodę wybieramy możliwie prostą, korzystając na przykład z przybliżenia rozkładu χ^2_k rozkładem normalnym $N(k, 2k)$.
Względny błąd estymacji przedziałowej mierzymy za pomocą ilorazu:

$$R = \frac{\overline{\sigma^2} - \underline{\sigma^2}}{2 \cdot \sigma^2}.$$

Rozmiar próbki *n*, dla którego $E(R) \approx 0.01$, wynosi:

(A) 100

(B) 500

(C) 2500

(D) 75000

(E) 1000000

Uwaga: prawidłowa odpowiedź podana jest w grubym przybliżeniu

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 kwietnia 2000 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	A	
4	A	
5	B	
6	B	
7	C	
8	E	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.