Zadanie 1.
W urnie jest biała kula. Przeprowadzamy dwuetapowe doświadczenie:
1. Rzucamy kostką i dorzucamy do urny tyle czarnych kul ile oczek wypadło na kostce.
2. Losujemy z urny kulę.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym etapie na kostce była dwójka, jeśli wiemy, że w drugim etapie wylosowaliśmy białą kulę?

(A) 14,9%

(B) 16,4%

(C) 17,9%

(D) 19,4%

(E) 20,9%

Zadanie 2.
Jabłko upada od jabłoni w odległości, która jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(x) = 2e^{-2x}$ (*pomijamy średnicę pnia i średnicę jabłka*) . Jabłko może spadać w każdym kierunku z tym samym prawdopodobieństwem. Jaka jest wartość oczekiwana odległości dwóch jabłek, które spadły niezależnie pod warunkiem, że obydwa upadły w tej samej odległości od jabłoni?

(A) 0,637

(B) 0,785

(C) 1,047

(D) 1,273

(E) 1,571

Zadanie 3.
W urnie jest 6 białych kul i 2 czarne. Losujemy kolejno, bez zwracania 6 kul. Niech B_i oznacza zdarzenie polegające na wyciągnięciu w i-tym losowaniu białej kuli, C_i na wyciągnięciu w i-tym losowaniu czarnej kuli.

Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) zdarzenia $B_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap B_4$ oraz B_6 są niezależne

(B) zdarzenia $B_1 \cap C_2$ oraz $B_3 \cap C_4$ są niezależne

(C) zdarzenia $B_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap B_4$ oraz $C_5 \cap B_6$ są niezależne

(D) $\Pr(B_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap C_4) > \Pr(B_1 \cap C_2) \cdot \Pr(B_3 \cap C_4)$

(E) $\Pr(B_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap C_5 \cap B_6) <$
$< \Pr(B_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap B_4) \cdot \Pr(C_5 \cap B_6)$

Zadanie 4.

Macierz kowariancji wektora losowego $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest postaci:

$\sigma^2 \cdot (I \cdot (1-\rho) + \rho \cdot E)$,

gdzie macierze *I* oraz *E* to, odpowiednio, macierz jednostkowa i macierz złożona z samych jedynek, a obie są oczywiście wymiarów $n \times n$. Zakładamy, że macierz ta jest rzędu *n*. Zbiór dopuszczalnych wartości parametru ρ to:

(A) $(-\infty, \quad 1)$

(B) $(-1, \quad 1)$

(C) $\left(-\frac{1}{n-1}, \quad 1\right)$

(D) $\left(-\frac{1}{n}, \quad 1\right)$

(E) $[0, \quad 1)$

Zadanie 5.
Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_5, X_6, \ldots, X_{20}$ są niezależne, o jednakowym rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$, oraz przyjmijmy oznaczenia:
$S_5 = X_1 + \ldots + X_5$,
$S_{20} = X_1 + \ldots + X_{20}$.
Który z wzorów na warunkową wartość oczekiwaną $E\left(S_5^2 \middle| S_{20}\right)$ jest poprawny?

(A) $5\mu^2 + \frac{1}{16}\sigma^2$

(B) $25\mu^2 + 5\sigma^2$

(C) $5\mu^2 + \frac{15}{4}\sigma^2$

(D) $\frac{1}{16}S_{20}^2 + 5\sigma^2$

(E) $\frac{1}{16}S_{20}^2 + \frac{15}{4}\sigma^2$

Zadanie 6.
Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & dla \quad x>0 \\ 0 & dla \quad x\le 0 \end{cases}$$

Niech:
$\lfloor x \rfloor$ - oznacza część całkowitą x (największą liczbę całkowitą n taką, że $n \le x$)
$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ - oznacza część ułamkową liczby x.
Współczynnik korelacji liniowej: $Corr(\lfloor X \rfloor, \ \langle X \rangle)$ wynosi:

(A) 1

(B) 0.5

(C) nie istnieje, ponieważ $E(\lfloor X \rfloor) = \infty$

(D) 0

(E) -0.5

Zadanie 7.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ ze znaną średnią μ i nieznaną wariancją σ^2. Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy hipotezy:

$H_0: \quad \sigma^2 \leq 1$

przeciw alternatywie:

$H_1: \quad \sigma^2 > 1,$

na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Rozważmy moc tego testu (prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 przy założeniu, że prawdziwa jest H_1).

Moc testu przekracza 0.9 wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $\sigma^2 \geq \mu^2$

(B) $\sigma^2 \geq 3.7628$

(C) $\dfrac{\sigma^2}{\mu^2} \geq 3.7628$

(D) nigdy: moc testu jest zawsze mniejsza od 0.9

(E) $\sigma^2 \geq 4.0591$

Zadanie 8.
W urnie jest r czarnych kul. O liczbie r wiemy tylko tyle, że jest większa od zera.
Powtarzamy trzy razy następujące czynności:

- losujemy jedną kulę z urny i odkładamy ją na bok (nie zwracamy)
- wrzucamy do urny 1 kulę białą.

Wynikiem doświadczenia jest sekwencja trzech liter – C lub B – na przykład CBB oznacza, iż wylosowaliśmy po kolei kulę czarną, potem białą, i znowu białą).
Obliczamy estymator $\hat{r}$ największej wiarogodności nieznanej liczby r.
Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) Jeśli wynik jest CBC to $\hat{r} = 2$

(B) Jeśli wynik jest CCB to $\hat{r} = 3$

(C) Jeśli wynik jest CCC to $\hat{r} = 3$

(D) Jeśli wynik jest CBB to $\hat{r} = 2$

(E) Wyniki CBC i CCB dają dwie różne wartości estymatora $\hat{r}$

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają identyczny rozkład dany gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & dla \quad 0 < x < 2 \\ 0 & dla \quad x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Niech $\Pi_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$.

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(\Pi_n \leq 1) = 0.5$

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr(\Pi_n \geq 1.5) = 1$

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr(\Pi_n \leq 0.5) = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr(0.5 \leq \Pi_n \leq 1.5) = 1$

(E) $\lim_{n\to\infty} E\left(e^{t \cdot \Pi_n}\right) = e^t$, dla każdego t

Zadanie 10.

Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}$ będzie próbką prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie $m, n > 1$.

Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, \ldots, X_n$, ale znamy średnią:

$$\overline{X}_{n+m} = \frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m} X_i$$

Który z estymatorów wariancji σ^2 jest nieobciążony?

(A) $\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$

(B) $\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{m-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$

(C) $\frac{n}{n-1}\cdot\frac{m}{n+m}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$

(D) $\frac{1}{n}\cdot\frac{n+m}{n+m-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$

(E) żaden z estymatorów podanych w punktach A, B, C, D

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 stycznia 2000 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....KLUCZ ODPOWIEDZI..................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	A	
4	C	
5	E	
6	D	
7	B	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.