Zadanie 1.

Pewne przedsiębiorstwo transportowe posiada dwie grupy samochodów:
A – małe samochody ciężarowe,
B – duże samochody ciężarowe.
Łączna wartość szkód w grupie A jest niezależna od łącznej wartości szkód w grupie B; obie zmienne mają złożone rozkłady Poissona.
Częstotliwość szkód wynosi:
w grupie A: 3 na rok
w grupie B: 1 na rok
Wartość pojedynczej szkody ma rozkład:
w grupie A:

- $\Pr(Y_A = 30) = 0.5$,
- $\Pr(Y_A = 50) = 0.3$,
- $\Pr(Y_A = 150) = 0.2$;

w grupie B:

- $\Pr(Y_B = 50) = 0.6$,
- $\Pr(Y_B \geq 150) = 0.4$.

Prawdopodobieństwo, że łączna wartość szkód w przedsiębiorstwie w ciągu roku będzie nie większa niż 100 wynosi (z dokładnością do 0.005)

(A) 0.121

(B) 0.136

(C) 0.151

(D) 0.166

(E) 0.196

Zadanie 2.
Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci: $u(x) = \ln(x)$.
Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w. Połowa tego majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q. Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według wartości oczekiwanego odszkodowania pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$. Przy założeniu, iż:
$w = 2, \quad q = 0.2, \quad \theta = 0.25$
podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

(A) 0 (tzn. ubezpieczenie pełne)

(B) $\frac{7}{15}$

(C) $\frac{10}{15}$

(D) $\frac{23}{30}$

(E) 1 (tzn. nie ubezpieczy się wcale)

Zadanie 3.

Ilość zgłaszanych roszczeń ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, q).
Przyjmijmy typowe oznaczenie: $p = 1 - q$.
Niezależnie od przebiegu procesu zgłaszania roszczeń, każde roszczenie z prawdopodobieństwem P jest oddalane, zaś z prawdopodobieństwem $Q = 1 - P$ jest uznawane. Decyzje oddalania/uznawania kolejnych roszczeń są także nawzajem niezależne. Rozkład ilości roszczeń uznanych jest także rozkładem ujemnym dwumianowym, z parametrami:

(A) $(r \cdot Q, \quad q)$

(B) $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{1 - qQ}\right)$

(C) $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{1 - qP}\right)$

(D) $\left(r, \quad \dfrac{qQ}{p + Q}\right)$

(E) nie jest to rozkład ujemny dwumianowy

Zadanie 4.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:

- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - łączna wartość szkód jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ,
- wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy
- składka c zawiera stosunkowy narzut bezpieczeństwa (*relative security loading*) $\theta = 0.2$, co zapewnia iż prawdopodobieństwo ruiny:

  $\Psi(u) = \Pr\big(U(t) < 0 \quad \textit{dla pewnego} \quad t > 0\big)$ równe jest $\frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2 \cdot u$. Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, prawdopodobieństwo ruiny wyniesie teraz:

(A) 0.010

(B) 0.012

(C) 0.0144

(D) $\frac{1}{144}$

(E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 5.
Pewne ryzyko generuje zawsze dokładnie jedną szkodę. Wartość tej szkody (oznaczmy ją przez X) jest zawsze dodatnia, przy czym:

$E(X) = 10$

$\Pr(X = k) = \frac{k}{30}$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5,$

$\Pr(X \geq 6) = \frac{1}{2}$

Ubezpieczyciel proponuje kilka wariantów ubezpieczenia - różniących się wysokością kwotowo określonego udziału własnego. Składka za pokrycie nadwyżki szkody ponad k skalkulowana jest zgodnie ze wzorem:

$Składka\left[(X-k)_+\right] = 11 - k$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5.$

Dla którego k proponowana składka zawiera najmniejszy narzut procentowy na wartość oczekiwaną świadczenia ubezpieczeniowego?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Zadanie 6.
O rozkładzie pewnego ryzyka X posiadamy następujące informacje:

- znamy oczekiwaną wartość nadwyżki ponad 20:

$E\left[(X-20)_{+}\right]=8$

- oraz znamy następujące charakterystyki dotyczące przedziału $\left(10,20\right]$:

$$\Pr(X\le 20)=\frac{3}{4}$$

$$\Pr(X\le 10)=\frac{1}{4}$$

$$E\left(X|10<X\le 20\right)=13$$

Wobec tego oczekiwana wartość nadwyżki ponad 10:

$$E\left[(X-10)_{+}\right],$$

wynosi:

(A) 12

(B) 12.5

(C) 13

(D) 13.5

(E) 14

Zadanie 7.
Łączna wartość szkód S ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną ilością szkód równą 4 oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym:

gęstością $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} & dla \quad x \in (0, \quad 2) \\ \frac{1}{24} & dla \quad x \in (2, \quad 5) \end{cases}$

oraz masą prawdopodobieństwa równą 0.125 w punkcie $x = 5$.

Wariancja zmiennej S wynosi:

(A) $\frac{125}{12}$

(B) 16

(C) 23

(D) 30

(E) 32

Zadanie 8.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$U(t) = u + c \cdot t - N(t)$,

gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona (*zwykłym, a nie złożonym*!) z parametrem częstotliwości λ.

Niech

$\Psi(u) = \Pr\big(U(t) < 0 \quad \textit{dla pewnego} \quad t > 0\big)$.

Wiemy, że dla dowolnego $u > 1$ zachodzi:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{u-1} \le \Psi(u) \le \left(\frac{1}{2}\right)^{u}$.

Wobec tego składka *c* przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) $\frac{e^{\lambda}}{\ln 2}$

(B) $\frac{1+\lambda}{\ln 2}$

(C) $\lambda \cdot e^{2}$

(D) $\lambda \cdot \ln 2$

(E) $\frac{\lambda}{\ln 2}$

Zadanie 9.
Zakładamy, że narastanie łącznej wartości szkód opisuje złożony proces Poissona:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n ,$$

gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ na jednostkę czasu, a wartości kolejnych szkód są niezależne nawzajem i od procesu $N(t)$, oraz mają wartość oczekiwaną $E(Y_n) = \mu$.
Niech $T_1 < T_2 < \ldots$ oznaczają momenty wystąpienia kolejnych szkód. Zdyskontowana wartość szkód:

$$\tilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{(1+i)^{T_n}}$$

ma (przy założeniu dodatniej efektywnej stopy procentowej *i*) wartość oczekiwaną równą:

(A) $\dfrac{\mu \cdot \lambda}{i}$

(B) $\dfrac{\mu \cdot \lambda}{e^i - 1}$

(C) $\dfrac{\mu \cdot \lambda}{\ln(1+i)}$

(D) $\dfrac{\mu \cdot \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{\ln(1+i)}$

(E) $\dfrac{\lambda \cdot \left(e^{\mu} - 1\right)}{\ln(1+i)}$

Zadanie 10.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia *n*-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za *n*-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$. Załóżmy, iż zmienne losowe: T_1, $(T_2 - T_1)$, $(T_3 - T_2)$, $\dots$

oraz: D_1, D_2, D_3, $\dots$

są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego *n* wypłata odszkodowania za szkodę $n+1$-szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę *n*-tą wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 października 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	C	
4	B	
5	E	
6	A	
7	C	
8	E	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.