**Zadanie 1**
Rzucamy 4 kości do gry (uczciwe). Prawdopodobieństwo zdarzenia iż najmniejsza uzyskana na pojedynczej kości liczba oczek wyniesie trzy (trzy oczka mogą wystąpić na więcej niż jednej kości) równe jest:

(A) $\dfrac{65}{1296}$

(B) $\dfrac{81}{1296}$

(C) $\dfrac{175}{1296}$

(D) $\dfrac{256}{1296}$

(E) $\dfrac{369}{1296}$

**Zadanie 2.**
Mamy ryzyka dobre i ryzyka złe. Dobre ryzyka generują w roku szkodę (co najwyżej jedną) z prawdopodobieństwem 0,2, a złe z prawdopodobieństwem 0,4. Niestety nie potrafimy odróżniać złych ryzyk od dobrych. Na szczęście wiemy, że:

- w kolejnych latach ryzyka dobre pozostają dobre, a złe pozostają złe
- wybraliśmy rok temu pewne ryzyko losowo z populacji, w której jest 75% ryzyk dobrych i 25% ryzyk złych
- ryzyko to w ciągu ubiegłego roku wygenerowało szkodę

Prawdopodobieństwo wygenerowania szkody przez to ryzyko w roku nadchodzącym wynosi:

(A) 0,24

(B) 0,25

(C) 0,26

(D) 0,27

(E) 0,28

**Zadanie 3.**
Jeśli wiemy, że dla trzech parami niezależnych zdarzeń A, B, C
$P(A) = P(B) = P(C)$
$A \cap B \cap C = \phi$ (zbiór pusty)
Największa możliwa wartość prawdopodobieństwa P(A) równa jest (w przybliżeniu dziesiętnym):

(A) 0,500

(B) 0,522

(C) 0,541

(D) 0,562

(E) 0,577

**Zadanie 4.** Zmienna losowa $N$ ma rozkład z geometrycznym ogonem, tzn. dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \begin{cases} p_0 & dla \quad k = 0 \\ (1 - p_0) \cdot p \cdot q^{k-1} & dla \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

gdzie parametry rozkładu $p_0 = 0{,}5$ oraz $p = 1 - q = 0{,}25$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:

(A) 1,5

(B) 2

(C) 2,5

(D) 3

(E) 3,5

**Zadanie 5.**

$(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ jest prostą próbą losową z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 5. Jeśli wiadomo, że $\Pr\left(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_{10}\} \le x\right) = 0.95$, to liczba $x$ wynosi:

(A) 24.866

(B) 25.388

(C) 25.857

(D) 26.377

(E) 26.824

**Zadanie 6.**

Zmienna losowa $Y$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, natomiast zależna od niej zmienna $X$ ma rozkład warunkowy (przy danej wartości $Y = y$) jednostajny na przedziale $[0, y]$. Prawdopodobieństwo (bezwarunkowe):
$\Pr(X < 0{,}5)$ wynosi:

(A) 0,500

(B) 0,622

(C) 0,750

(D) 0,847

(E) 0,911

**Zadanie 7.**

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ jest prostą próbą losową z rozkładu geometrycznego:

$\Pr(X_i = k) = p \cdot q^k \quad k = 0, 1, \dots$

gdzie $p = 1 - q \in (0, 1)$,

i gdzie liczebność próby przekracza 1.

W klasie estymatorów parametru *p*, danych wzorem:

$$\frac{a}{a + \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

dobierz parametr *a* tak, aby otrzymać estymator nieobciążony:

(A) $a = n$

(B) $a = n - 0{,}5$

(C) $a = n + 0{,}5$

(D) $a = n - 1$

(E) $a = n + 1$

**Zadanie 8.**

Niech $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ będzie próbką niezależnych obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale $(\varphi_0, \varphi_1)$ z nieznanymi oboma parametrami, i niech $n > 1$. Interesuje nas szerokość przedziału $(\varphi_1 - \varphi_0)$. Dobierz tak parametr $a$, aby estymator szerokości przedziału postaci:

$a \cdot \left( \max_i \left\{ X_i \right\} - \min_i \left\{ X_i \right\} \right)$ był nieobciążony.

(A) $a = \frac{n}{n-1}$

(B) $a = \frac{n+1}{n-1}$

(C) $a = \frac{n+2}{n-1}$

(D) $a = \frac{n+2}{n}$

(E) $a = \frac{n+1}{n}$

**Zadanie 9.**
Wyniki oszacowania trzech alternatywnych modeli rozkładu ilości szkód $N$ na tej samej (licznej) próbce ryzyk dały następujące wartości logarytmu funkcji wiarygodności:

- -571,22 dla zwykłego rozkładu Poissona (model 1)
- -572,20 dla modelu ze swobodnym parametrem $\Pr(N=0)$ oraz ogonem Poissonowskim (model 2)
- -573,25 dla modelu ze swobodnymi parametrami $\Pr(N=0)$ oraz $\Pr(N=1)$ oraz ogonem Poissonowskim (model 3)

Dokonujemy doboru modelu na podstawie testów ilorazu wiarygodności, przeprowadzając go w przypadku porównania każdej pary modeli na poziomie istotności 0,05.

(A) należy wybrać model 1

(B) należy wybrać model 2

(C) należy wybrać model 3

(D) wybór trudno przeprowadzić, bo model 3 jest lepszy od 1 (odpowiednia hipoteza odrzucona), natomiast testy porównawcze modelu trzeciego z drugim oraz drugiego z pierwszym dają wskazują, iż model 1 jest najlepszy

(E) podane informacje są sprzeczne

**Zadanie 10.**

Mieliśmy próbę prostą $\left((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)\right)$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanych parametrach:

$EX_i = EY_i = \mu, \quad VarX_i = VarY_i = \sigma^2, \quad Cov(X_i, Y_i) = \sigma^2 \cdot \rho.$

Niestety, obserwacje na *X*'ach i *Y*'rekach zostały oddzielone, *Y*'reki pomieszane, po czym zagubiliśmy informacje o przynależności do par. Możemy to sformalizować przyjmując, iż mamy nadal niezmieniony ciąg *X*'ów, oraz ciąg $(Z_1, \ldots, Z_n)$, stanowiący losową permutację ciągu $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

$Cov(X_i, Z_i)$ wynosi:

(A) zero

(B) $\dfrac{\sigma^2 \cdot \rho}{n^2}$

(C) $\dfrac{\sigma^2 \cdot \rho}{n}$

(D) $\dfrac{\sigma^2 \cdot \rho}{n-1}$

(E) $\dfrac{\sigma^2 \cdot \rho \cdot (n-1)}{n^2}$

# Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 1997 r.

## Prawdopodobieństwo i statystyka

### Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ......................... KLUCZ ODPOWIEDZI ..............................

Pesel ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | C | |
| 2 | E | |
| 3 | E | |
| 4 | B | |
| 5 | D | |
| 6 | D | |
| 7 | D | |
| 8 | B | |
| 9 | E | |
| 10 | C | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.