Zadanie 1. Na odcinku $(0,1)$ losujemy punkt zgodnie z rozkładem jednostajnym. W ten sposób odcinek zostaje podzielony na dwa pododcinki (prawie na pewno dłuższy i krótszy). Wartość oczekiwana stosunku długości odcinka krótszego do długości odcinka dłuższego wynosi:

(A) $\frac{\ln 2}{2}$

(B) $\frac{\ln 2}{3}$

(C) $\ln 2$

(D) $(\ln 4) - 0.5$

(E) $(\ln 4) - 1$

Zadanie 2. W pewnej grze z talii 52 kart losujemy 2 karty. Wygrana następuje jeśli obie karty są asami. Rozpatrujemy następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

$X = \Pr(wygrana | co\ najmniej\ \ jedna\ z\ kart\ \ jest\ kierem)$

$Y = \Pr(wygrana | co\ najmniej\ \ jedna\ z\ kart\ \ jest\ asem)$

$Z = \Pr(wygrana | \ jedna\ z\ kart\ \ jest\ asem\ kier)$.

Pomiędzy prawdopodobieństwami X, Y i Z zachodzą zależności:

(A) $X > Y > Z$

(B) $X > Y = Z$

(C) $X < Y = Z$

(D) $X < Y < Z$

(E) $X < Z < Y$

Zadanie 3. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 5.
Zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na pewnym odcinku, przy czym jej wartość oczekiwana wynosi 5, a wariancja wynosi $25/3$.
Zmienne losowe X i Y są niezależne.
$\Pr(X+Y<6)$ wynosi:

(A) $0.1 \cdot e^{-1.2}$

(B) $0.5 \cdot e^{-1}$

(C) $0.1 + 0.5 \cdot e^{-1.2}$

(D) $0.1 + 0.1 \cdot e^{-1.2}$

(E) $0.1 + 0.5 \cdot e^{-1}$

Zadanie 4. W czterech urnach znajdują się kule czarne i białe:

- w urnie pierwszej są 2 kule czarne i 6 kul białych;
- w urnie drugiej są 4 kule czarne i 4 kule białe;
- w urnie trzeciej jest 6 kul czarnych i 2 kule białe;
- w urnie czwartej jest 8 kul czarnych.

Z wylosowanej (z równymi prawdopodobieństwami wyboru) urny ciągniemy kolejno (bez zwracania) 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej w trzecim ciągnieniu, jeśli w wyniku dwóch pierwszych ciągnień uzyskaliśmy dwie kule czarne?

(A) 0.8

(B) 0.7

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) $\frac{5}{14}$

Zadanie 5. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{E_1, E_2, E_3\}$ i stałą macierz prawdopodobieństw przejść:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix}$$

W chwili początkowej jesteśmy w stanie E_3. Prawdopodobieństwo przebywania w stanie E_1 po dwustu krokach z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) $\frac{8}{12}$

(B) $\frac{7}{12}$

(C) $\frac{6}{12}$

(D) $\frac{5}{12}$

(E) $\frac{4}{12}$

Zadanie 6. Studenci na egzaminie ustnym otrzymują pytania, na które mogą udzielić odpowiedzi poprawnej bądź fałszywej (nie ma ocen pośrednich). Zbiór możliwych pytań jest nieskończony. Egzamin przebiega w sposób sekwencyjny: najpierw student otrzymuje dwa losowo wybrane pytania, po czym:

1. w przypadku obu poprawnych odpowiedzi egzamin kończy się z wynikiem pozytywnym,
2. w przypadku obu fałszywych odpowiedzi egzamin kończy się z wynikiem negatywnym,
3. w pozostałych przypadkach student otrzymuje następne dwa losowo wybrane pytania, po czym wracamy do punktu 1.

Jednym słowem, egzamin kończy się w momencie, kiedy po raz pierwszy różnica ilości poprawnych i fałszywych odpowiedzi osiągnie 2 (zdał) lub –2 (oblał).
Student ucząc się do egzaminu osiąga stopniowo coraz wyższy poziom prawdopodobieństwa p udzielenia poprawnej odpowiedzi na losowo wybrane pytanie. Przy jakim poziomie parametru p student powinien przerwać naukę, jeśli jego celem jest zapewnienie (jak najniższym nakładem wysiłku) prawdopodobieństwa zdania egzaminu równego 0.8?

(A) $\frac{10}{12}$

(B) $\frac{9}{12}$

(C) $\frac{8}{12}$

(D) $\frac{7}{12}$

(E) $\frac{6}{12}$

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną zero i wariancją jeden, i niech:

$S = (X_1 + \cdots + X_n)^2$.

Wariancja zmiennej S wynosi:

(A) $3n \cdot (n-1)$

(B) $2n$

(C) $2n^2$

(D) $2n^4$

(E) $3n^2$

Zadanie 8. Obserwujemy zmienną y_t oraz zmienne $\left[x_{t,1}, \ldots, x_{t,K}\right]$, co w postaci macierzowej zapisujemy:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{T,1} & \cdots & x_{T,K} \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, iż rząd macierzy X wynosi K, a rząd macierzy rozszerzonej $\left[y|X\right]$ wynosi $K+1$, oraz iż ilość obserwacji $T > K+1$.

Niech $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}$ oznacza hipotetyczny wektor współczynników regresji liniowej, oraz niech:

$b = (X'X)X'y$

oznacza jego estymator uzyskany zwykłą metodą najmniejszych kwadratów.

Niech teraz:

$e = y - Xb$

będzie wektorem reszt.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym (który trzeba dołączyć do wcześniej przyjętych założeń) na to, aby suma reszt była zero, jest:

(A) macierz X zawiera kolumnę jedynek;

(B) istnieje taka kombinacja liniowa kolumn macierzy X, która równa jest wektorowi jedynek;

(C) wszystkie elementy wektora y są równe (nawzajem);

(D) suma reszt będzie zerowa bez dodatkowych warunków;

(E) przy przyjętych założeniach suma reszt nigdy nie będzie zerowa.

Zadanie 9. Niech $N_1, N_2, \dots, N_n$ będzie próbą losową z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej λ, i niech $\overline{N} = \sum_{i=1}^{n} N_i$ będzie średnią z tej próby.

Dla jakiej wartości C estymator parametru $e^{-\lambda}$ postaci:

$C^{\overline{N}}$

będzie estymatorem nieobciążonym?

(A) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

(B) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$

(C) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

(D) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$

(E) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

Zadanie 10. Proces pojawiania się szkód jest procesem Poissonowskim z parametrem intensywności λ, tzn. prawdopodobieństwo pojawienia się *n* szkód na odcinku czasu $(0, T]$ jest równe:

$$\frac{(\lambda \cdot T)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda \cdot T}.$$

Obserwujemy proces od momentu 0. Niech $T_1, T_2, T_3, \ldots$ oznaczają momenty pojawiania się kolejnych szkód. Ustalamy z góry liczbę *n* taką, że obserwację procesu przerwiemy w momencie T_n pojawienia się *n*-tej szkody.

Dla jakiej wartości *C* estymator parametru λ postaci:

$$\frac{C}{T_n}$$

będzie estymatorem nieobciążonym?

(A) $n + \frac{1}{2}$

(B) n

(C) $n - \frac{1}{2}$

(D) $n - 1$, przy czym należy ustalić $n > 1$

(E) $n - \frac{3}{2}$, przy czym należy ustalić $n > 1$

Egzamin dla Aktuariuszy z 30 maja 1998 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	C	
4	A	
5	B	
6	C	
7	C	
8	B	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.