Zadanie 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 kart) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (nie są rozdzielone innymi kartami)?

(A) $\binom{52}{4}^{-1}$

(B) $\binom{52}{3}^{-1}$

(C) $\frac{4}{52}$

(D) $\frac{4!}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

(E) $\frac{1}{48!}$

Zadanie 2. Niech $X_1,\ X_2, \dots ,\ X_8$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\ \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Znajdź najmniejszą liczbę c taką żeby przedział:
$[\max\{X_1, X_2, \dots, X_8\},\quad c \cdot \max\{X_1, X_2, \dots, X_8\}]$
Był przedziałem ufności dla θ na poziomie 0.9375

(A) 2.0000

(B) 1.0667

(C) 1.4142

(D) 1.0625

1.1250

Zadanie 3. Niech N_1 i N_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio: $E(N_1) = 20$, $E(N_2) = 30$. $VAR(N_1 | N_1 + N_2 = 50)$ wynosi:

(A) 0

(B) 10

(C) 20

(D) 12

(E) 50

Zadanie 4. Rozpatrzmy zmienne losowe X i Y o łącznym rozkładzie normalnym.
Wiadomo, że:

$VAR(Y) = 9$

$E(Y|X) = \frac{1}{2}X + 7$

$VAR(Y|X) = 8$

Wobec tego $COV(X,Y)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(0, 2^2)$.
Rozważmy najmocniejszy test hipotezy:
$H_0: \quad \mu = 0$ przeciw alternatywie:
$H_1: \quad \mu = 1$,
na poziomie istotności $\alpha = 0.01$. Ile obserwacji potrzeba (jak duże musi być n), żeby moc testu była większa niż 0.9?

(A) Potrzeba przynajmniej $n = 75$ obserwacji

(B) Potrzeba przynajmniej $n = 14$ obserwacji

(C) Potrzeba przynajmniej $n = 100$ obserwacji

(D) Wystarczą $n = 4$ obserwacje

(E) Potrzeba przynajmniej $n = 53$ obserwacji

Zadanie 6. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y+x} & dla \quad 0<x<1 \quad i \quad y>x \\ 0 & w \ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Wartość oczekiwana $E(X+Y)$ jest równa:

(A) $e = 2.718.....$

(B) 1.5

(C) 0.5

(D) 1

(E) 2

Zadanie 7. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym:

$$f_\theta(x) = \Pr_\theta(X = x) = \theta^x \cdot (1-\theta) \qquad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Załóżmy, że nieznany parametr θ jest realizacją zmiennej losowej Θ, która ma gęstość (*a priori*):

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 3\theta^2 & dla \quad 0 < \theta < 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Wartość Bayes'owskiego estymatora parametru θ obliczona na podstawie zaobserwowanej wartości $X = 0$, czyli $E(\Theta | X = 0)$ wynosi:

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) 0.8

Zadanie 8. Niech $X_1,\ X_2, \dots ,\ X_8,\ X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym gęstość X_i jest dana wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x} & dla \quad x>0\\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku\end{cases} \qquad dla \quad i=1,2,\dots,8.$$

Zmienna X_9 ma inny rozkład, o gęstości:

$$g(x)=\begin{cases}\lambda^2\cdot x\cdot e^{-\lambda\cdot x} & dla \quad x>0\\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku\end{cases}$$

Estymator największej wiarygodności nieznanego parametru λ ma postać:

(A) $\hat{\lambda}=\dfrac{9}{\sum_{i=1}^{9} X_i}$

(B) $\hat{\lambda}=\left(\sum_{i=1}^{8} X_i+\dfrac{1}{2}\cdot X_9\right)^{-1}$

(C) $\hat{\lambda}=\left(\dfrac{1}{8}\cdot\sum_{i=1}^{8} X_i+\dfrac{1}{2}\cdot X_9\right)^{-1}$

(D) $\hat{\lambda}=\dfrac{10}{\sum_{i=1}^{9} X_i}$

(E) $\hat{\lambda}=\left(\dfrac{1}{8}\cdot\sum_{i=1}^{8} X_i+X_9\right)^{-1}$

Zadanie 9. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, zaś $x_{26}, x_{27}, \ldots, x_{50}$ - próbą losową z rozkładu $N(\nu, \tau^2)$, gdzie μ, ν, σ, τ są nieznanymi parametrami. Wiemy, że:

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{25} \cdot \sum_{i=1}^{25} x_i = 10.4$$

$$\bar{x}_{50} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{50} x_i = 10.0$$

$$s_{25}^2 = \frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x}_{25})^2 = 3.333,$$

$$s_{50}^2 = \frac{1}{49} \cdot \sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x}_{50})^2 = 2.000.$$

Czy na podstawie tych danych można policzyć wartość nieobciążonego estymatora $\hat{\tau}^2$ wariancji τ^2?

(A) TAK, $\hat{\tau}^2 = 1.333$

(B) TAK, $\hat{\tau}^2 = 0.400$

(C) TAK, $\hat{\tau}^2 = 2.666$

(D) TAK, $\hat{\tau}^2 = 0.417$

(E) NIE

Zadanie 10. W urnie I znajdują się dwie kule i w urnie II znajdują się dwie kule. Na te cztery kule w sumie składają się dwie kule białe i dwie czarne. Przeprowadzamy następujące doświadczenie losowe:

a) najpierw losujemy jedną kulę z urny I i przekładamy ją do urny II,
b) następnie losujemy jedną kulę z urny II i przekładamy ją do urny I.

Sekwencję dwóch losowań a) i b) powtarzamy wielokrotnie. Przed każdym losowaniem dokładnie mieszamy kule w urnie. Niech $p_n(1)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n powtórzeniach (czyli po $2n$ losowaniach) w urnie I znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Prawdą jest, że:

(A) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{2}{3}$

(B) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{3}$

(D) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{4}$

(E) granica $\lim_{n\to\infty} p_n(1)$ zależy od tego, ile kul białych było w I urnie na początku

Egzamin dla Aktuariuszy z 21 czerwca 1997 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	D	
4	C	
5	E	
6	E	
7	C	
8	D	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.