Zadanie 1. Dla pewnego portfela ryzyk liczba szkód ma rozkład Poissona ze średnią 10. Wysokość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy o średniej 200. Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 100. Wartość oczekiwana i wariancja sumy S wypłaconych odszkodowań wynoszą:

(A) $E(S)=1000$, $VAR(S)=400000$

(B) $E(S)=2000$, $VAR(S)=800000$

(C) $E(S)=1213$, $VAR(S)=485200$

(D) $E(S)=1213$, $VAR(S)=242600$

(E) $E(S)=2000$, $VAR(S)=400000$

Zadanie 2. Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności θ. O parametrze θ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Θ o rozkładzie Gamma $(2, 1)$. Niech $N(0, t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do *t*, zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t*.
$E(T(3) - 3 | N(0, 3) = 2)$ wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 3. Zakładamy, że decydent postępuje zgodnie z regułą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. O funkcji użyteczności wiemy tyle, że reprezentuje zachowania określone jako „awersja do ryzyka”.
Wyobraźmy sobie wypłaty *X*, *Y* oraz *Z* w trzech różnych grach losowych:

$X \sim N(5, 2^2)$

$Y \sim N(5, 3^2)$

$Z \sim N(6, 3^2)$

Symbol $a \succ b$ oznacza, że decydent preferuje *a* ponad *b*. Symbol $a \cong b$ oznacza, że wypłaty *a* i *b* są dla decydenta równie dobre. Piszemy $a \succ\cong b$ jeśli $a \succ b$ lub $a \cong b$.
Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) Zawsze mamy $X \succ\cong Z \succ\cong Y$

(B) Zawsze mamy $Z \succ\cong X \succ\cong Y$

(C) Zawsze mamy $X \succ\cong Y$. Zależnie od postaci funkcji użyteczności może być $Z \succ X$ lub $X \succ Z$

(D) Każda kolejność preferencji trzech ww. wypłat jest możliwa

(E) Zawsze mamy $X \cong Y$

Zadanie 4. Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$,
gdzie u jest nadwyżką początkową,
ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:
X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ.
Prawdopodobieństwo ruiny oznaczymy przez Ψ:
$\Psi = \Pr(\exists\, t \in (0, \infty),\ \ U(t) < 0)$
Rozważmy prawdopodobieństwa ruiny dla trzech następujących zestawów parametrów procesu:
Ψ_1 dla procesu o parametrach: $u_1 = 10$, $c_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$
Ψ_2 dla procesu o parametrach: $u_2 = 20$, $c_2 = 8$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_2 = 2$
Ψ_3 dla procesu o parametrach: $u_3 = 10$, $c_3 = 4$, $\mu_3 = 2$, $\lambda_3 = 1$
Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\Psi_1 = \Psi_2 > \Psi_3$

(B) $\Psi_1 > \Psi_2 > \Psi_3$

(C) $\Psi_3 = \Psi_1$

(D) $\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3$

(E) $\Psi_1 < \Psi_2 = \Psi_3$

Zadanie 5. Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:
$U(t) = ct - S_{N(t)}$,
z zerową nadwyżką początkową,
ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu *t*,
$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:
X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 20]$.
Niech $T = \inf\{t > 0: \quad U(t) < 0\}$ będzie momentem ruiny.

Prawdopodobieństwo zajścia ruiny z deficytem w momencie ruiny przekraczającym kwotę 10:
$\Pr(T < \infty, \quad U(T) < -10)$
wynosi:

(A) 0.6667

(B) 0.1667

(C) 1

(D) 0.1

(E) 0.0667

Zadanie 6. Wyjściowy portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla pojedynczego ryzyka ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ. S oznacza łączną wartość szkód z całego portfela ryzyk. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G tak, aby:

$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01$,

przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.

Dla naszego portfela wyjściowego mamy:

$n = 1000$, $\mu = 10$, $\sigma = 10$.

Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych n_1 ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych n ryzyk z portfela wyjściowego.

Ich charakterystyki to:

$\mu_1 = 10$, $\sigma_1 = 15$,

Jednakże warunkiem objęcia „nowych" ryzyk jest zaoferowanie pokrycia za składkę w tej samej wysokości G, co dla „starych" ryzyk. Niech S_1 oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich n_1 mamy:

$\Pr(S + S_1 > (n + n_1) \cdot G) \le 0.01$?

(*Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej*)

(A) Dla $n_1 \ge 250$

(B) Dla $n_1 \le 250$

(C) Dla $n_1 \ge 1500$

(D) Dla każdego n_1

(E) Dla żadnego n_1

Zadanie 7. Portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Pojedyncze ryzyko może generować co najwyżej jedną szkodę z prawdopodobieństwem q, a z prawdopodobieństwem $1-q$ nie generuje żadnej szkody. Rozkład warunkowy szkody (jeśli do niej dojdzie) ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ. S oznacza łączną wartość szkód z całego portfela ryzyk. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G:

$$G = \frac{1+\theta}{n} \cdot E(S),$$

gdzie stosunkowy narzut bezpieczeństwa θ jest dobrany tak, że:

$$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01,$$

przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.

Dla naszego portfela mamy:

$n = 1000$, $q = 0.05$, $\mu = 10$, $\sigma = 10$.

Stosunkowy narzut bezpieczeństwa θ wynosi:

(A) 0.046

(B) 0.230

(C) 0.165

(D) 0.460

(E) 0.023

Zadanie 8. Szkoda powstała w miesiącu j jest zgłaszana w miesiącu $j+d$ z prawdopodobieństwem 0.75^{d+1} dla $d=0,1,2,\ldots$. Liczby szkód zachodzących w poszczególnych miesiącach są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 5. Opóźnienia są niezależne od siebie nawzajem i od liczby szkód.
Oblicz wartość oczekiwaną szkód, które zaszły w miesiącach $j_0,\ j_0-1,\ j_0-2,\ldots,$ ale nie zostały zgłoszone w miesiącu j_0 lub wcześniej (zakładamy, iż rozpatrujemy proces trwający od niepamiętnych czasów). Odpowiedź brzmi:

(A) 1

(B) 5

(C) $\frac{15}{4}$

(D) $\frac{5}{4}$

(E) $\frac{5}{3}$

Zadanie 9. Zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne i mają jednakowy rozkład o dystrybuancie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x < 0 \\ 0.9 + 0.01 \cdot x & dla \quad 0 \le x \le 10 \\ 1 & dla \quad x > 10 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo:

$\Pr(X_1 + X_2 \le 15)$

wynosi:

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{799}{800}$

(C) $\frac{399}{400}$

(D) $\frac{99}{100}$

(E) $\frac{81}{100}$

Zadanie 10. Pewne ryzyko generuje w kolejnych latach $j = 1, 2, \ldots, n, n+1$ szkody o wysokości X_j. Zakładamy, że dla ustalonej wartości θ parametru strukturalnego Θ:

$E(X_j / \Theta = \theta) = \mu(\theta) \cdot (1+i)^j$,

$VAR(X_j / \Theta = \theta) = \sigma^2(\theta) \cdot (1+i)^{2 \cdot j}$

$COV(X_j, X_k / \Theta = \theta) = 0$ dla $j \neq k$,

gdzie i oznacza stopę inflacji.

Nie znamy wartości θ parametru Θ. Ryzyko zostało wylosowane z pewnej populacji ryzyk i uważamy Θ za zmienną losową. Niech:

$E[\mu(\Theta)] = m$,

$E[\sigma^2(\Theta)] = s^2$,

$VAR[\mu(\Theta)] = a^2$,

$$z = \frac{n \cdot a^2}{n \cdot a^2 + s^2}.$$

Naszym zadaniem jest zbudowanie takiej liniowej funkcji (zawierającej wyraz wolny):

$$h^*(X_1, \ldots, X_n) = c_0^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* \cdot X_j,$$

która najlepiej przewiduje szkody w $(n+1)$-szym roku. To znaczy, że wartości c_j^* współczynników c_j dobrać należy tak, aby:

$$E\left[\left(h^*(X_1, \ldots, X_n) - X_{n+1}\right)^2\right] \leq E\left[\left(h(X_1, \ldots, X_n) - X_{n+1}\right)^2\right],$$

gdzie po prawej stronie mamy funkcję h o dowolnych współczynnikach c_j (np. różnych od c_j^*).

Funkcja h^* jest postaci:

(A) $h^* = z \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j + (1-z) \cdot m \cdot (1+i)^{n+1}$

(B) $h^* = z \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j + (1-z) \cdot m$

(C) $h^* = z \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{(1+i)^j} + (1-z) \cdot m$

(D) $h^* = \left[z \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{(1+i)^j} + (1-z) \cdot m\right] \cdot (1+i)^{n+1}$

(E) $h^* = \left[z \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j + (1-z) \cdot m\right] \cdot (1+i)^{n+1}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 21 czerwca 1997 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	C	
4	D	
5	B	
6	A	
7	D	
8	E	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.