Zadanie 1. Portfel ryzyk składa się z dwóch niezależnych subportfeli. W każdym z nich ryzyka są niezależne. Pojedyncze ryzyko może wygenerować co najwyżej jedną szkodę, a rozkład wartości szkody (warunkowy, o ile do niej dojdzie) dany jest odpowiednią dystrybuantą. Niech S_i oznacza łączną wartość wypłat w i-tym subportfelu, zaś $\tilde{S}_i$ aproksymację zmiennej S_i powstałą przez zastąpienie rozkładu dwumianowego takim rozkładem Poissona, że $E(\tilde{S}_i) = E(S_i)$ - przy pozostawieniu bez zmian rozkładu wartości szkody. Jeśli parametry subportfeli wynoszą:

Nr subportfela i	ilość ryzyk $n(i)$	p-stwo zajścia szkody $q(i)$	oczekiwana wart. szkody $p1(i)$	2-gi moment zwykły rozkł. wart. szkody $p2(i)$
1	2500	0.005	4	20
2	400	0.02	5	30

to $VAR(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2) - VAR(S_1 + S_2)$ wynosi:

(A) 2.2

(B) 5.0

(C) 7.8

(D) 10.6

(E) 13.4

Wskazówka: być może nie wszystkie informacje zawarte w tabeli są niezbędne do udzielenia odpowiedzi.

Zadanie 2. Portfel ryzyk składa się z dwóch subportfeli dokładnie takich, jak w treści zadania nr 1. Teraz jednak aproksymujemy zmienną $(S_1 + S_2)$ za pomocą zmiennej $\overline{S}$ o rozkładzie złożonym dwumianowym i parametrach:

$n = n_1 + n_2$,

$$q = \frac{n_1 q_1 + n_2 q_2}{n},$$

oraz o dystrybuancie rozkładu pojedynczej szkody określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem:

$$F(x) = \frac{n_1 q_1 F_1(x) + n_2 q_2 F_2(x)}{n_1 q_1 + n_2 q_2},$$

gdzie $F_1(\cdot)$ oraz $F_2(\cdot)$ to odpowiednie dystrybuanty w subportfelach.

$VAR(\overline{S}) - VAR(S_1 + S_2)$ wynosi (w zaokrągleniu):

(A) -2.2

(B) 0.0

(C) 2.2

(D) 5.0

(E) 7.2

Wskazówka: w wyborze prawidłowej odpowiedzi może Ci pomóc porównanie z wynikiem rozwiązania zadania nr. 1.

Zadanie 3. Dla pewnego ryzyka składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad d jest dla wszystkich d należących do zbioru $[0, 3] \cup [6, 10]$ dana wzorem:

$$E\left[(X-d)_+\right] = \frac{(10-d)^2}{20}.$$

Zbiór możliwych wartości dla $E\left[(X-4)_+\right]$ wynosi:

(A) [1.75; 1.90]

(B) [1.60; 1.90]

(C) [1.60; 1.75]

(D) [1.65; 1.85]

(E) [1.75; 1.85]

Zadanie 4. W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem sześć dziesiątych wynosi 0 i z prawdopodobieństwem cztery dziesiąte wynosi 2 (niezależnie od łącznej wartości szkód w innych latach). Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

(E) $\frac{5}{9}$

Wskazówka: zauważ, iż w tym przypadku łatwo można obliczyć wartość wyrażenia: $E\left(\exp\left(-RU_{\tilde{T}}\right) / \tilde{T} < \infty\right)$, *gdzie* $\tilde{T}$ *jest okresem, na koniec którego doszło do ruiny.*

Zadanie 5. W pewnym jednorodnym portfelu ryzyk ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 5, a wartość szkody *Y* ma rozkład Gamma (2, 10), tzn. dany jest on gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 100 \cdot y \cdot \exp(-10y) & dla \quad y > 0 \\ 0 & dla \quad y \le 0 \end{cases}$$

Łączną wartość szkód z tego portfela aproksymujemy za pomocą zmiennej o rozkładzie przesuniętym Gamma (x_0, α, β) - a więc takiej, która po odjęciu stałej x_0 ma rozkład Gamma (α, β) - zachowując przy tym wartość pierwszych trzech momentów. Parametry (x_0, α, β) wynoszą:

(A) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{10}{9};\ \frac{10}{3\sqrt{3}}\right)$

(B) $\left(0;\ \frac{10}{3};\ \frac{10}{3}\right)$

(C) $(-0.2;\quad 4.8;\quad 4)$

(D) $(-0.5;\quad 7.5;\quad 5)$

(E) $\left(1-\sqrt{3};\ 10;\ \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$

Zadanie 6. Wartość szkody Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}.
Aproksymujemy zmienną Y za pomocą zmiennej $\tilde{Y}$ o rozkładzie określonym na zbiorze liczb naturalnych z zerem, o własnościach:
$\Pr\left(\tilde{Y} = k+1\right) = \Pr\left(\tilde{Y} = k\right) \cdot \exp(-\beta)$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$, oraz:
$E\left(\tilde{Y}\right) = E(Y)$.
Wtedy $\Pr\left(\tilde{Y} = 0\right)$ wynosi:

(A) $1 - e^{-\beta}$

(B) $\dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$

(C) $1 - \dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$

(D) $\dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

(E) $1 - \dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

Zadanie 7. Pewne ryzyko generuje szkody w ilości danej rozkładem Poissona z wartością oczekiwaną $1.6 \cdot t$ za okres o długości t lat. Jeśli szkoda wystąpi, to jej wartość jest zawsze jeden. Niech S_R oznacza łączną wartość szkód za rok, a S_Q łączną wartość szkód za kwartał z tego ryzyka. Jeśli zarówno w ubezpieczeniu rocznym, jak i w kwartalnym wprowadzimy limit odpowiedzialności 3, to stosunek składek netto $\dfrac{E\left(\min\left\{S_Q, 3\right\}\right)}{E\left(\min\left\{S_R, 3\right\}\right)}$ wyniesie (w przybliżeniu):

(A) 0.244

(B) 0.250

(C) 0.256

(D) 0.262

(E) 0.268

Zadanie 8. W klasycznym modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym rozkład wartości pojedynczej szkody Y ma gęstość:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{64}{(2+y)^5} & dla \quad y > 0 \\ 0 & dla \quad y \le 0 \end{cases},$$

oczekiwana ilość szkód na jednostkę czasu $\lambda = 3$, a pochodna funkcji gromadzonej składki $c = 2.5$. Współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) R wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

(E) jest nieokreślony

Zadanie 9. Niech w pewnym jednorodnym portfelu ryzyk X_t oznacza łączną wartość szkód, n_t ilość jednostek ryzyka, a μ_t składkę netto na jednostkę ryzyka w roku *t*. Fluktuacje łącznej szkody opisują założenia:

$$E(X_{t-1} / \mu_{t-1}) = \mu_{t-1} \cdot n_{t-1}$$
$$E(X_t / \mu_t, \mu_{t-1}) = \mu_t \cdot n_t$$
$$VAR(X_{t-1} / \mu_{t-1}) = s^2 \cdot n_{t-1}$$
$$VAR(X_t / \mu_t, \mu_{t-1}) = s^2 \cdot n_t$$
$$COV(X_t, X_{t-1} / \mu_t, \mu_{t-1}) = 0$$
$$COV(X_t, \mu_{t-1} / \mu_t) = 0$$

Natomiast zmiany μ_t w kolejnych latach opisują założenia:

$$E(\mu_t / \mu_{t-1}) = \mu_{t-1}$$
$$VAR(\mu_t / \mu_{t-1}) = a$$
$$COV(\mu_t, X_{t-1} / \mu_{t-1}) = 0$$

Jeśli $a = 1$, $s^2 = 6$, $n_{t-1} = 40$, $n_t = 60$, to wartość oczekiwana

$E\left(\left(\frac{X_t}{n_t} - \frac{X_{t-1}}{n_{t-1}}\right)^2\right)$ wynosi:

(A) 1.24

(B) 1.25

(C) 1.74

(D) 2.24

(E) 2.25

Zadanie 10. Ubezpieczyciel ma portfel liczący 9644 terminowych polis na życie z terminem jednego roku. Prawdopodobieństwo zgonu każdego z ubezpieczonych wynosi 0.01, a świadczenie wynosi b. Ubezpieczyciel pobiera składkę w wysokości 125% składki netto. Reasekurator w zamian za zobowiązanie pokrycia $\alpha \cdot b$ w razie śmierci ubezpieczonego żąda 150% swojego udziału w składce netto. Ubezpieczyciel chce utrzymać prawdopodobieństwo straty na udziale własnym w tym portfelu na poziomie 0.05. Nie ma kosztów, stopa procentowa jest zerowa. Wobec tego ubezpieczyciel powinien ustalić wskaźnik α na poziomie:

(A) 0.5

(B) 0.4

(C) $\frac{1}{3}$

(D) 0.25

(E) 0.2

Wskazówka: zastosuj aproksymację normalną, pamiętając iż standaryzowana zmienna normalna przekracza wartość 1.645 z prawdopodobieństwem 0.05.

Egzamin dla Aktuariuszy z 18 stycznia 1997 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	A	
4	C	
5	D	
6	C	
7	E	
8	E	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.