Zadanie 1. Wykonujemy 10 kolejnych, niezależnych rzutów symetryczną monetą. Niech S_n oznacza liczbę orłów otrzymaną w początkowych *n* rzutach. Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr\left(S_5 = 3 \middle| S_{10} = 7\right)$ jest równe:

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2^5}$

(D) $\frac{21}{50}$

(E) $\frac{\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2^5}}{\binom{10}{3} \cdot \frac{1}{2^{10}}}$

Zadanie 2. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x (czyli największą liczbę całkowitą n taką, że $n \le x$). Wartość oczekiwana zmiennej losowej $N = [X + 0.5]$ wyraża się wzorem:

(C) $\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{\lambda}\right] + \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{[\lambda]} + \frac{1}{2}$

(D) $\frac{e^{0.5 \cdot \lambda}}{e^{\lambda} - 1}$

(E) $\frac{1}{e^{\lambda} - 1}$

Zadanie 3. Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ma taką samą wartość oczekiwaną μ. Wiadomo, że:

$$COV(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & dla \quad i = j \\ \dfrac{\sigma^2}{2} & dla \quad i \neq j \end{cases}$$

Niech $S^2(c) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$, gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$S^2(c)$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2, jeśli c jest równe:

(A) $\dfrac{2}{n-1}$

(B) $\dfrac{2}{n-1+\frac{1}{n}}$

(C) $\dfrac{1}{n}$

(D) $\dfrac{2}{n}$

(E) $\dfrac{1}{n-1}$

Zadanie 4. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 0.5. Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. $\Pr\left(Y > X^2\right)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(C) $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 5. Rozważmy model regresji liniowej:
$Y_i = a \cdot x_i + \varepsilon_i$, $\qquad i = 1, 2, 3, 4,$
gdzie ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i nieznaną wariancją σ^2, zaś x_1, x_2, x_3, x_4 są (nielosowymi) punktami z przedziału $[0, 3]$, natomiast a jest nieznanym współczynnikiem. Wariancja estymatora $\hat{a}$ otrzymanego metodą najmniejszych kwadratów jest minimalna, jeśli (x_1, x_2, x_3, x_4) równe są odpowiednio:

(A) $(0, 1, 2, 3)$

(B) $(0, 0, 3, 3)$

(C) $(0, 3, 3, 3)$

(D) $(3, 3, 3, 3)$

(E) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Zadanie 6. Przyjmujemy, że liczby wypadków $N_1, N_2, \ldots, N_k$ zgłoszonych w kolejnych k latach są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zakładamy, że zmienna N_i ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą $\lambda \cdot m_i$, gdzie m_i jest (znaną) liczbą samochodów ubezpieczonych w i-tym roku, zaś λ nieznanym parametrem. Estymator Największej Wiarygodności $\hat{\lambda}$ parametru λ dany jest wzorem:

(A) $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{m_i}$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$

(C) $\hat{\lambda} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$

(E) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot m_i}{k}$

Zadanie 7. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x-\theta|}, \quad x \in R,$$

gdzie θ jest nieznanym parametrem. Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy

$H_0: \ \theta = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: \ \theta > 0$

na poziomie istotności α, gdzie $\alpha < 0.5$, oparty na pojedynczej obserwacji X. Funkcja mocy tego testu $\beta(\theta)$ osiąga wartość 0.75 dla θ równego:

(A) $-\ln\alpha$

(B) $\ln\frac{3}{4} - \ln\alpha$

(C) $-\ln\left(\frac{3}{4}\cdot\alpha\right)$

(D) $-\ln\frac{\alpha}{4}$

(E) $-\ln(2\cdot\alpha)$

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_8$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną θ i wariancją 1. Nieznany parametr θ jest, z kolei, zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 1. Rozważamy Bayes'owski przedział ufności dla parametru θ, to znaczy:

przedział $[a, b]$, gdzie $a = a(X_1, X_2, \ldots, X_8)$, $b = b(X_1, X_2, \ldots, X_8)$, taki, że:

$\Pr(\theta < a | X_1, X_2, \ldots, X_8) = 0.05 = \Pr(\theta > b | X_1, X_2, \ldots, X_8)$.

Jeśli przyjmiemy oznaczenie: $\overline{X} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{8} X_i$, to przedział $[a, b]$ przybiera postać:

(A) $[\overline{X} - 0.548, \quad \overline{X} + 0.548]$

(B) $[\overline{X} - 0.427, \quad \overline{X} + 0.427]$

(C) $\left[\frac{8}{9}\overline{X} - 0.548, \quad \frac{8}{9}\overline{X} + 0.548\right]$

(D) $\left[\frac{8}{9}\overline{X} - 0.427, \quad \frac{8}{9}\overline{X} + 0.427\right]$

(E) $[\overline{X} - 0.427, \quad \overline{X} + 0.548]$

Zadanie 9. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3\}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że w chwili 0 łańcuch znajduje się w stanie e_1. Niech T oznacza chwilę, w której łańcuch po raz pierwszy znajdzie się w stanie e_2. Wartość oczekiwana zmiennej losowej T wynosi:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) ∞

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10. $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(400)}$ jest próbą losową z pewnego rozkładu ciągłego o wariancji σ^2, ustawioną w porządku niemalejącym, tzn. tak, że $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(400)}$. Niech m będzie medianą rozważanego rozkładu. Przybliżona (na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego), wartość $\Pr\left(X_{(220)} \le m\right)$ wynosi:

(A) 0.0149

(B) 0.0049

(C) 0.0532

(D) 0.0256

(E) $\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)$, gdzie Φ jest dystrybuantą standaryzowanej zmiennej normalnej

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 grudnia 1996 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	E	
5	D	
6	B	
7	A	
8	C	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.