Zadanie 1. Decydent z awersją do ryzyka narażony jest na szkodę X. W tabeli podane są możliwe wartości x szkody X, prawdopodobieństwa ich wystąpienia oraz wysokości odszkodowań wynikające z trzech zaoferowanych decydentowi kontraktów ubezpieczeniowych:

szkoda x	0	1	2	3
$\Pr(X = x)$	0.8	0.08	0.08	0.04
$I^{(1)}(x)$	0	1	2	3
$I^{(2)}(x)$	0	0.4	1.4	2.4
$I^{(3)}(x)$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2

Jeśli wszystkie kontrakty oferowane są po cenach równych odpowiadającym im składkom netto, to decydent wybierze kontrakt:

(A) $I^{(1)}$

(B) $I^{(2)}$

(C) $I^{(3)}$

(C) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(2)}$

(E) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(3)}$

Zadanie 2. Dla pewnego ryzyka ilość szkód na rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.2, a wartość szkody Y ma rozkład podany w tabeli:

y	1	2	3	4
$\Pr(Y = y)$	0.5	0.3	0.1	0.1

Ubezpieczyciel pokrywa szkody w pełni, dopóki łączna ich wartość nie przekroczy limitu odpowiedzialności równego 3 (nadwyżkę łącznej wartości szkód ponad 3 pokrywa ktoś inny). Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość wypłaconych odszkodowań wyniesie 3 jest równe:

(A) $1 - 1.125e^{-0.2}$ (B) $1 - 1.025e^{-0.2}$ (C) $0.125e^{-0.2}$

(D) $1 - 1.165e^{-0.2}$ (E) $0.165e^{-0.2}$

Zadanie 3. Ryzyko ma ten sam rozkład ilości szkód i wartości szkody co w zadaniu numer 2. Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 1 (bez limitu odpowiedzialności na łączną wartość szkód). Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość odszkodowań wyniesie 2 jest równe:

(A) $0.0228e^{-0.1}$

(B) $0.0114e^{-0.1}$

(C) $0.0114e^{-0.2}$

(D) $0.0218e^{-0.1}$

(E) $0.0109e^{-0.2}$

Zadanie 4. Rozkład wartości szkody Y dany jest gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{(1+y)^4} & dla \quad y > 0 \\ 0 & dla \quad y \le 0 \end{cases}$$

Jeśli ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.1, a ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 2, to składka netto wynosi:

(A) $\dfrac{1}{90}$

(B) $\dfrac{1}{180}$

(C) $\dfrac{1}{270}$

(D) $\dfrac{1}{360}$

(E) $\dfrac{1}{450}$

Zadanie 5. Niech $S = Y_1 + \ldots + Y_N$, $N = M_1 + \ldots + M_K$, oraz wszystkie zmienne $Y_1, Y_2, \ldots,$ $M_1, M_2, \ldots$ oraz K są nawzajem niezależne. Jeśli teraz $M_1, M_2, \ldots$ mają identyczny rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.5, zmienna K ma także rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.3, a zmienna Y ma wartość oczekiwaną p_1 i wariancję $p_2 - p_1^2$, to wariancja zmiennej S wynosi:

(A) $0.15 p_2$

(B) $0.15\left(p_2 + 0.15 p_1^2\right)$

(C) $0.15\left(p_2 + 0.3 p_1^2\right)$

(D) $0.15\left(p_2 + 0.5 p_1^2\right)$

(E) $0.15\left(p_2 + 0.8 p_1^2\right)$

Zadanie 6. Dwa nieobciążone estymatory $\hat{\Theta}_1$ i $\hat{\Theta}_2$ parametru Θ mają wariancje odpowiednio 2 i 4 oraz kowariancję 2. Estymator $\hat{\Theta}_3(z) = z \cdot \hat{\Theta}_1 + (1 - z) \cdot \hat{\Theta}_2$ osiąga najmniejszą wariancję jeśli współczynnik z równy jest:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{5}{6}$

(E) 1

Zadanie 7. Ryzyko X ma rozkład z atomami: $\Pr(X=0)=0.8$

$\Pr(X=1)=0.1$

i gęstością: $f_X(x)=0.1$ dla $x\in(0;1)$.

Ryzyko Y ma rozkład z atomami: $\Pr(Y=0)=0.7$

$\Pr(Y=2)=0.1$

i gęstością: $f_Y(x)=0.1$ dla $x\in(0;2)$.

Jeśli X i Y są niezależne, to ile wynosi $\Pr\left(X+Y\in\langle 1;2\rangle\right)$?

(A) 0.19

(B) 0.21

(C) 0.23

(D) 0.25

(E) 0.27

Zadanie 8. Mamy 900 podmiotów, każdy z nich narażony na pewne ryzyko. Ryzyka te są niezależne i mają identyczne rozkłady ze średnią 1 i wariancją 4. Podmioty te utworzyły towarzystwo koasekuracyjne I. Mamy też grupę 800 innych podmiotów, każdy z nich narażony na ryzyko. Ryzyka w tej grupie są niezależne (nawzajem i od ryzyk z pierwszej grupy) i mają identyczne rozkłady ze średnią 2 i wariancją 8. Podmioty drugiej grupy utworzyły towarzystwo koasekuracyjne II. W obu towarzystwach ustalono równe składki (Π_1 i Π_2 odpowiednio) dla członków tak, aby prawdopodobieństwo iż suma szkód przekroczy sumę składek wyniosło 0.0013 (w obu towarzystwach uznano aproksymację rozkładem normalnym łącznej sumy szkód za wystarczającą, a wartość standaryzowanej zmiennej normalnej przekracza liczbę 3 z prawdopodobieństwem 0.0013).
Między towarzystwami toczą się pertraktacje o ustalenie nowych składek Π_1^* i Π_2^* tak, aby po utworzeniu wspólnego towarzystwa zachować ten sam standard bezpieczeństwa w odniesieniu do połączonego portfela ryzyk. Jaki jest zbiór dopuszczalnych (spełniających warunek obustronnych korzyści) wartości Π_2^*?

(A) (2.10; 2.30)

(B) (2.15; 2.30)

(C) (2.24; 2.30)

(D) (2.275; 2.30)

(E) inny

Zadanie 9. Nadwyżka jest złożonym procesem Poissona, w którym θ to stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto, L to maksymalna całkowita strata a L_1 to wartość o którą nadwyżka spada po raz pierwszy poniżej poziomu wyjściowego (o ile do takiego spadku dochodzi). Jeśli L_1 ma rozkład jednostajny na przedziale (0; 2), to $\mathrm{M}_L(r)$ dla r nierównego zeru wynosi:

(A) $\dfrac{2r\theta}{1+2r(1+\theta)-e^{2r}}$

(B) $\dfrac{r\theta}{1+r(1+\theta)-e^{r}}$

(C) $\dfrac{2r\theta}{2r(1+\theta)-e^{2r}}$

(D) $\dfrac{r\theta}{r(1+\theta)-e^{r}}$

(E) $\dfrac{r}{1+r(1+\theta)-e^{r}}$

Zadanie 10. Ubezpieczyciel otrzymuje corocznie składkę 2 i wypłaca odszkodowania za rok i-ty w wysokości W_i. W_i są niezależne i mają jednakowy rozkład:

$\Pr(W_i = 1) = \frac{6}{7}$ oraz $\Pr(W_i = 4) = \frac{1}{7}$.

Współczynnik dostosowania R (*adjustment coefficient*) wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) ln2

(C) 1

(D) ln3

(E) 2ln2

Egzamin dla Aktuariuszy z 26 października 1996 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	D	
4	B	
5	D	
6	E	
7	D	
8	B	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.