

Nazwa przedmiotu	Algebra liniowa
Kod przedmiotu	2400-ZL1AL
Profil studiów	ogólnoakademicki
Stopień studiów	pierwszy
Kierunek studiów	ekonomia
Specjalność (jeśli dotyczy)	Analityka Ekonomiczna
Forma studiów	studia niestacjonarne zaoczne
Rok studiów	I
Semestr	zimowy
Liczba godzin	56
Forma/typ zajęć	wykład (28h) + ćwiczenia (28h)
Punkty ECTS	6
Rodzaj przedmiotu (przedmiot obowiązkowy / kierunkowy do wyboru / fakultatywny / seminarium)	obowiązkowy
Sposób realizacji przedmiotu (stacjonarny / zdalny / kurs internetowy / kurs realizowany metodą blended learning)	stacjonarny
Język wykładowy	polski
Wymagania formalne	
Założenia wstępne	znajomość matematyki w zakresie odpowiadającym podstawie programowej matury z matematyki na poziomie podstawowym
Skrócony opis przedmiotu	Zajęcia z algebry liniowej obejmują zagadnienia dotyczące macierzy, wyznaczników, układów równań liniowych, przekształceń liniowych oraz przestrzeni wektorowych. Studenci poznają metody rozwiązywania problemów z użyciem eliminacji Gaussa, uczą się obliczania rzędu macierzy i wyznaczników, a także diagonalizacji i analizy wartości własnych. Ważnym elementem kursu jest rozumienie, w jaki sposób algebra liniowa wspiera metody ilościowe w ekonomii, statystyce i ekonometrii. Dzięki liczным ćwiczeniom praktycznym uczestnicy zdobywają umiejętność formułowania i rozwiązywania różnych problemów, co przekłada się na lepsze rozumienie modeli matematycznych w naukach ekonomicznych.
Treści kształcenia dla przedmiotu	Przedmiotem zajęć w trakcie przedmiotu Algebra liniowa jest czternaście bloków tematycznych. Łącznie tworzą one spójny zestaw narzędzi do opisu i rozwiązywania problemów liniowych, stanowiących podstawę metod ilościowych wykorzystywanych w ekonomii, statystyce i ekonometrii. Celem wykładu jest wprowadzenie pojęć i twierdzeń oraz przedstawienie metod obliczeniowych i interpretacyjnych, wraz z ukazaniem ich roli w analizowaniu i modelowaniu zjawisk ekonomicznych oraz w pracy z danymi. Celem ćwiczeń jest ugruntowanie wiedzy przekazywanej na wykładzie i uzyskanej w drodze samodzielnego studiowania literatury, a także wykształcenie umiejętności rozwiązywania standardowych zadań rachunkowych; w uzasadnionym zakresie wykorzystywane są narzędzia obliczeniowe (np. Octave/MATLAB) do weryfikacji wyników i sprawnego wykonywania obliczeń.

	W kolejnych blokach omawiane są następujące treści: • układy równań liniowych: zapis macierzowy, operacje elementarne, eliminacja Gaussa, postać (schodkowa) zredukowana macierzy i jej jednoznaczność, warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań; • przestrzenie wektorowe: podprzestrzenie, kombinacje liniowe, generowanie, równoważne opisy podprzestrzeni; • bazy i liniowa niezależność: baza, wymiar, współrzędne w bazie, kryteria niezależności, lemat Steinitza; • odwzorowania liniowe: definicje, jądro i obraz, macierz odwzorowania i jej rząd, twierdzenie o wymiarach; • działania na odwzorowaniach liniowych: złożenie i suma, mnożenie macierzy, macierze elementarne, związek mnożenia macierzy ze składaniem odwzorowań liniowych, macierze blokowe; • wyznaczniki: definicja, własności, interpretacja geometryczna, wzór Laplace'a, metody obliczania, wyznacznik macierzy (blokowej) górnotrójkątnej; • zastosowania wyznaczników: macierz odwrotna, związek wyznacznika z odwracalnością, metody obliczania macierzy odwrotnej, charakteryzacja rzędu przez niezerowe minory, twierdzenie Kroneckera-Capellego, wnioskowanie o rozwiązalności układów, reguła Cramera, własności algebry macierzy; • endomorfizmy liniowe: macierze kwadratowe, wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne oraz metody ich obliczania, twierdzenie Cayley'a-Hamiltona; • zastosowania diagonalizacji macierzy: macierze diagonalizowalne, wyznacznik Vandermonde'a, twierdzenie o niezależności wektorów własnych, obliczanie potęgi macierzy, wielomian minimalny, charakteryzacja macierzy diagonalizowalnych; • iloczyn skalarny: standardowy iloczyn skalarny i jego interpretacja geometryczna, nierówność Cauchy'ego-Schwarza, dopełnienie ortogonalne, rozkład ortogonalny, bazy ortonormalne, rzuty i symetrie ortogonalne oraz ich własności, ortogonalizacja Grama-Schmidta, metoda najmniejszych kwadratów; • przestrzeń afiniczna R^n: podprzestrzenie afiniczne, kombinacje afiniczne, równoważne opisy podprzestrzeni afinicznych, odwzorowania afiniczne, metody obliczania afinicznego rzutu ortogonalnego oraz symetrii; • programowanie liniowe: sformułowanie zadania programowania liniowego, przykłady zastosowań, interpretacja geometryczna ograniczeń i funkcji celu, postać standardowa, zbiory bazowe dopuszczalne i ich interpretacja geometryczna; • metoda sympleks: idea metody, tablice sympleksowe, rozwiązania bazowe i interpretacja wyników, znajdowanie początkowego zbioru bazowego dopuszczalnego, zjawisko cykliczności w metodzie sympleks; • formy kwadratowe: macierze symetryczne, (pół-)określoność, kryterium Sylwestera, twierdzenie spektralne, kryterium wartości własnych, zastosowania w optymalizacji.
Przedmiotowe efekty uczenia się	Po ukończeniu przedmiotu, student: W ZAKRESIE WIEDZY: • zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia algebry liniowej: przestrzenie wektorowe, kombinacje i niezależność liniową, bazy i wymiar, przekształcenia liniowe oraz ich reprezentacje macierzowe.

	- zna i rozumie własności macierzy i wyznaczników (rzęd, odwracalność, rozwiązywalność układów równań), a także pojęcia wartości i wektorów własnych, diagonalizacji, iloczynu skalarnego i form kwadratowych (określoność). - zna i rozumie rolę algebry liniowej jako narzędzia metod ilościowych w ekonomii, statystyce i ekonometrii, w tym znaczenie obliczeń numerycznych oraz analizy danych w środowisku dynamicznego rozwoju technologii (np. big data, AI). W ZAKRESIE UMIEJĘTNOŚCI: - potrafi rozwiązywać układy równań liniowych metodą eliminacji Gaussa oraz oceniać liczbę rozwiązań (jednoznaczność/niejednoznaczność/brak) na podstawie postaci zredukowanej/rzędu macierzy. - potrafi badać niezależność liniową, wyznaczać bazy i wymiar, obliczać rząd i wyznacznik, wyznaczać wartości i wektory własne oraz (gdy to możliwe) przeprowadzać diagonalizację macierzy i analizę form kwadratowych. - potrafi wykorzystywać narzędzia informatyczne (np. Octave/MATLAB) do obliczeń, weryfikacji i prezentacji wyników oraz interpretować je w kontekście modeli ekonomicznych, statystycznych, ekonometrycznych i prostych zadań optymalizacyjnych (np. programowania liniowego). W ZAKRESIE KOMPETENCJI: - wykazuje postawę krytyczną w analizie wyników (weryfikacja poprawności, ocena ograniczeń metod i danych) oraz gotowość do stosowania narzędzi ilościowych w rozwiązywaniu problemów ekonomicznych. - jest gotów do stałego rozwijania własnych kompetencji matematycznych i informatycznych (w tym uczenia się nowych narzędzi analitycznych w warunkach cyfryzacji) oraz do współpracy z ekspertami z innych dziedzin przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.
Powiązanie efektów przedmiotowych z efektami kierunkowymi/specjalnościowymi (oznaczonymi kodami z programu nauczania)	kierunek Ekonomia: K_W02 K_W07 K_U02 K_K01
Nakład pracy studenta	Szacunkowy nakład pracy studenta: 6 ECTS x 25h = 150h (K) - godziny kontaktowe (S) - godziny pracy samodzielnej wykład (zajęcia): 28h (K) 0h (S) ćwiczenia (zajęcia): 28h (K) 0h (S) egzamin: 3h (K) 0h (S) konsultacje: 11h (K) 0h (S) przygotowanie do ćwiczeń: 0h (K) 20h (S) przygotowanie do wykładów: 0h (K) 10h (S) przygotowanie do kolokwium i kartkówki: 0h (K) 25h (S) przygotowanie do egzaminu: 0h (K) 20h (S) praktyczne obliczenia w środowisku Octave/MATLAB 0h (K) 5h (S) Razem: 70h (K) + 80h (S) = 150h
Metody i kryteria oceniania	Uzyskanie zaliczenia przedmiotu wymaga: 1. obecności na ćwiczeniach (dopuszczalne są dwie nieobecności), uzyskania punktów z ćwiczeń, stanowiących 30% wyniku końcowego, na podstawie

	dwóch pisemnych kolokwiiów, pisemnych kartkówek oraz aktywności w czasie zajęć, polegającej w szczególności na rozwiązywaniu zadań przy tablicy lub udziale w dyskusji; 2. uzyskania punktów z pisemnego egzaminu końcowego, stanowiącego 70% wyniku końcowego, który składa się z 7 standardowych zadań obliczeniowych; 3. uzyskania co najmniej 50% punktów z wyniku końcowego, liczonego jako suma ważona punktów z ćwiczeń (30%) oraz punktów z egzaminu końcowego (70%). 4. Skala ocen: [0%-50%) – ndst (2.0) [50%-60%) – dst (3.0) [60%-70%) – dst+ (3.5) [70%-80%) – db (4.0) [80%-90%) – db+ (4.5) [90%-100%] – bdb (5.0)
Literatura	Literatura obowiązkowa (wybrane rozdziały): - Koźniewski, Tadeusz. Wykłady z algebry liniowej I. Warszawa: Uniwersytet Warszawski, Wydział MIM UW, 2008. - Rutkowski, Jerzy. Algebra liniowa w zadaniach. 1. wyd. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012. - Slajdy do wykładów. Literatura uzupełniająca (wybrane rozdziały): - Antoniewicz, Ryszard; Misztal, Andrzej. Matematyka dla studentów ekonomii. Wykłady z ćwiczeniami. 4. wyd. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2023. - Klukowski, Julian; Nabiałek, Ireneusz. Algebra dla studentów. 4. wyd. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021. - Banaszak, Grzegorz; Gajda, Wojciech. Elementy algebry liniowej. Cz. 1. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2002. - Banaszak, Grzegorz; Gajda, Wojciech. Elementy algebry liniowej. Cz. 2. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2002. - Dokumentacja programu Octave: https://docs.octave.org/latest/
Metody dydaktyczne	W ramach wykładu wykorzystywane są następujące metody dydaktyczne: - prezentacja multimedialna, - dyskusja problemowa, - analiza danych w programach komputerowych. W ramach ćwiczeń wykorzystywane są następujące metody dydaktyczne: - ćwiczenia rachunkowe i analityczne, - praca w grupach i dyskusja problemowa na forum grupy, - analiza danych w programach komputerowych.
Oprogramowanie	GNU Octave