

|                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nazwa przedmiotu                                                                                                  | Analiza matematyczna II.1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Kod przedmiotu                                                                                                    | do wypełnienia przez dziekanat                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Profil studiów                                                                                                    | ogólnoakademicki                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Stopień studiów                                                                                                   | pierwszy                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Kierunek studiów                                                                                                  | Ekonomia                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Specjalność (jeśli dotyczy)                                                                                       | Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Forma studiów                                                                                                     | studia stacjonarne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Rok studiów                                                                                                       | II                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Semestr                                                                                                           | zimowy                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Liczba godzin                                                                                                     | 120                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Forma/typ zajęć                                                                                                   | wykład (60h) + ćwiczenia (60h)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Punkty ECTS                                                                                                       | 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Rodzaj przedmiotu (przedmiot obowiązkowy / kierunkowy do wyboru / fakultatywny / seminarium)                      | obowiązkowy                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Sposób realizacji przedmiotu (stacjonarny / zdalny / kurs internetowy / kurs realizowany metodą blended learning) | stacjonarny                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Język wykładowy                                                                                                   | polski                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Wymagania formalne                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Założenia wstępne                                                                                                 | Oczekuje się dobrej znajomości zagadnień ujętych w sylabusach przedmiotów Analiza matematyczna I.2 oraz Wstęp do matematyki.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Skrócony opis przedmiotu                                                                                          | Kurs obejmuje rachunek różniczkowy wielu zmiennych rzeczywistych, w tym twierdzenia o funkcji uwikłanej i odwrotnej, pojęcie rozmaitości zanurzonej w $R^n$ i przestrzeni stycznej do rozmaitości, twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a. W drugiej części kursu następuje wprowadzenie do teorii miary i całki Lebesgue'a. Podczas ćwiczeń wykonywane są zadania, w ramach których student nabiera umiejętności stosowania teorii omawianej na wykładzie.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Treści kształcenia dla przedmiotu                                                                                 | <p>Przedmiot składa się z dwóch części. Pierwsza obejmuje rachunek różniczkowy wielu zmiennych rzeczywistych, druga - wprowadzenie do teorii miary i całki Lebesgue'a. Część druga jest kontynuowana w ramach przedmiotu Analiza Matematyczna II.2.</p> <p>Rachunek różniczkowy wielu zmiennych</p> <p>1. Zbieżność ciągów w przestrzeni <math>R^n</math>, zbiory otwarte i domknięte. Odwzorowania liniowe w <math>R^n</math> i ich własności: różnowartościowość, otwartość zbioru odwzorowań odwracalnych. Norma przekształcenia liniowego w <math>R^n</math>. Zbiory zwarte, spójne i łukowo spójne w <math>R^n</math>.</p> <p>2. Odwzorowania ciągłe z podzbiorów <math>R^n</math> w <math>R^k</math> i ich podstawowe własności. Jednostajna ciągłość, odwzorowania lipszycowskie. Funkcje ciągłe na zbiorach zwartych i ich własności (twierdzenie Weierstrassa o kresach, twierdzenie o obrazie zbioru zwartego, twierdzenie Heine-Cantora o jednostajnej ciągłości). Równoważność norm w <math>R^n</math>, ciągłość normy. Własność Darboux dla funkcji</p> |

|                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                               | <p>skalarnych. Pochodne kierunkowe i cząstkowe, macierz Jacobiego. Pochodna funkcji. Związek pochodnej z pochodnymi kierunkowymi. Pochodna formy dwuliniowej. Pochodna superpozycji odwzorowań. Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych i odwzorowań. Punkty krytyczne funkcji i lemat Fermata. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej. Prostopadłość gradientu funkcji do jej poziomicy.</p> <p>3. Pochodne wyższych rzędów, Twierdzenie Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych.</p> <p>4. Odwzorowania różniczkowalne podzbiorów otwartych przestrzeni euklidesowych. Twierdzenie o funkcji odwrotnej. Dyfeomorfizmy. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Twierdzenie Brouwera o zachowaniu otwartości (bez dowodu).</p> <p>5. Rozmaitości zanurzone w <math>R^n</math>, lokalne układy współrzędnych i lokalne parametryzacje. Przestrzeń wektorów stycznych i normalnych. Rozmaitości zadane przez układ równań.</p> <p>6. Ekstrema warunkowe (związane), metoda mnożników Lagrange'a. Przykłady.</p> <p>Teoria miary i całki Lebesgue'a</p> <p>7. Sigma-ciała: definicja, własności. Sigma-ciało zbiorów borelowskich. Definicja miary, przestrzeń z miarą, własności miary. Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Zbiory mierzalne i miara Lebesgue'a.</p> <p>8. Własności zbiorów mierzalnych: aproksymacja zbiorów mierzalnych zbiorami otwartymi, domkniętymi, <math>G_\delta</math>, <math>F_\sigma</math>, mierzalność iloczynu kartezjańskiego. Istnienie zbioru niemierzalnego. Funkcje mierzalne: definicja, własności, funkcje proste. Funkcja mierzalna jako granica niemalejącego ciągu funkcji prostych.</p> <p>9. Definicja całki, własności: oszacowanie modułu całki, twierdzenie Lebesgue'a o monotonicznym przejściu do granicy, lemat Fatou, twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy. Aproksymacja całki Lebesgue'a sumami Riemanna.</p> <p>10. Twierdzenie Fubniego i twierdzenie o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a. Przykłady zastosowań.</p> |
| <p><b>Przedmiotowe efekty uczenia się</b></p> | <p>Po ukończeniu przedmiotu, student:</p> <p><b>W ZAKRESIE WIEDZY:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych, w szczególności dotyczące ciągłości, różniczkowalności, pochodnych cząstkowych i kierunkowych, pochodnej odwzorowania oraz ekstremów funkcji.</li> <li>• Zna i rozumie fundamentalne twierdzenia analizy wielu zmiennych, w tym twierdzenie Schwarz'a, wzór Taylora, twierdzenie o funkcji odwrotnej i funkcji uwikłanej oraz metodę mnożników Lagrange'a.</li> <li>• Zna podstawowe pojęcia teorii miary i całki Lebesgue'a, w tym pojęcie miary, funkcji mierzalnej oraz najważniejsze twierdzenia zbieżności i twierdzenia o całkowaniu iterowanym.</li> </ul> <p><b>W ZAKRESIE UMIEJĘTNOŚCI:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Potrafi badać ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych oraz analizować ich własności lokalne, w tym wyznaczać punkty krytyczne i ekstrema.</li> <li>• Potrafi stosować narzędzia rachunku różniczkowego wielu zmiennych do rozwiązywania standardowych problemów obliczeniowych i</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

|                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                               | <p>geometrycznych, w tym zagadnień z ekstremami warunkowymi i prostych przykładów dyfeomorfizmów oraz różności.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Potrafi wykorzystywać podstawowe twierdzenia teorii miary i całki Lebesgue'a do badania granic, ciągłości i różniczkowości funkcji określonych za pomocą całek zależnych od parametru.</li> </ul> <p><b>W ZAKRESIE KOMPETENCJI:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Jest gotów do systematycznej i samodzielnej pracy nad zagadnieniami matematycznymi wymagającymi abstrakcyjnego, precyzyjnego i logicznego rozumowania.</li> <li>Wykazuje rzetelność i odpowiedzialność w prowadzeniu rozumowań matematycznych oraz w prezentowaniu wyników analiz i obliczeń.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Powiązanie efektów przedmiotowych z efektami kierunkowymi/specjalnościowym i (oznaczonymi kodami z programu nauczania)</b> | specjalność Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne: S_W01, S_U03, S_K01                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Nakład pracy studenta</b>                                                                                                  | <p>Szacunkowy nakład pracy studenta: 9ECTS x 25h = 225h</p> <p>(K) - godziny kontaktowe (S) - godziny pracy samodzielnej</p> <p>ćwiczenia: 60h (K) 0h (S)</p> <p>wykład: 60h (K) 0h (S)</p> <p>przygotowanie do ćwiczeń: 0h (K) 25h (S)</p> <p>przygotowanie do kolokwium: 0h (K) 50h (S)</p> <p>przygotowanie do egzaminu: 0h (K) 30h (S)</p> <p>Razem: 120h (K) + 105h (S) = 225h</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Metody i kryteria oceniania</b>                                                                                            | <p>Uzyskanie zaliczenia przedmiotu wymaga:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>obecności na ćwiczeniach (dopuszczalne są dwie nieobecności) oraz aktywność w czasie zajęć, polegająca w szczególności na rozwiązywaniu zadań czy wykonywaniu prac domowych;</li> <li>napisania egzaminu końcowego, który składa się z zadań (w tym zadań mających charakter teoretyczny) sprawdzających umiejętności i wiedzę, którą student powinien nabyć w trakcie zajęć;</li> <li>Ostateczny wynik punktowy ustalany jest jako suma ważona oceny punktowej z ćwiczeń (15%), kolokwium (35%) oraz egzaminu pisemnego (50%);</li> <li>Możliwy jest egzamin ustny weryfikujący wiedzę studenta, w szczególności zrozumienie nauczanych pojęć; W szczególności na ocenę bdb wymagany jest egzamin ustny sprawdzający znajomość dowodów twierdzeń;</li> <li>Skala ocen: 2 - 5. Przewidywane progi punktowe:</li> </ol> <p>0%-50%) – ndst</p> <p>[50%-60%) – dst</p> <p>[60%-70%) – dst +</p> <p>[70%-80%) – db</p> <p>[80%-90%) – db+</p> <p>[90%-100%) – bdb.</p> |
| <b>Literatura</b>                                                                                                             | <ol style="list-style-type: none"> <li>A. Birkholc, Analiza matematyczna: Funkcje wielu zmiennych. Wydanie II, PWN, Warszawa 2018.</li> <li>G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1-3, PWN, Warszawa 2007.</li> <li>W. Kołodziej, Analiza matematyczna, PWN, Warszawa 2009.</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

|                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                           | <p>4. W. Rudin, Podstawy analizy matematycznej, PWN, Warszawa 2009.</p> <p>5. W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa 2009.</p> <p>6. L. Schwartz, Kurs analizy matematycznej. Tom 1-2, PWN, Warszawa 1979.</p> <p>7. M. Spivak, Analiza na rozmaitościach, PWN, Warszawa 2006.</p> <p>8. P. Strzelecki, Analiza matematyczna II (skrypt wykładu)</p>                                  |
| <b>Metody dydaktyczne</b> | <p>W ramach wykładu wykorzystywane są następujące metody dydaktyczne:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- wykład z użyciem tradycyjnej tablicy; materiały dydaktyczne (notatki do wykładów) dostępne na portalu moodle</li></ul> <p>W ramach ćwiczeń wykorzystywane są następujące metody dydaktyczne:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- ćwiczenia rachunkowe i analityczne</li></ul> |
| <b>Oprogramowanie</b>     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |