

Modelowanie wyborów dyskretnych

Ramy teoretyczne analizy

Plan:

1. Zbiór możliwych wyborów
2. Preferencje
3. Agregacja i heterogeniczność
4. Model losowej użyteczności

1 Wybory dyskretne a wybory ekonomiczne

Przedmiotem analizy wyborów dyskretnych jest wyjaśnienie zróżnicowania podejmowanych decyzji w populacji i identyfikacja czynników determinujących te zróżnicowanie oraz same wybory. Wymaga to wykonania dwóch współzależnych zadań: specyfikacji modelu behawioralnego oraz oszacowania jego parametrów.

Prezentację ram teoretycznych analizy rozpoczniemy od zdefiniowania sytuacji wyboru i określenia zbioru możliwych wyborów. Następnie omówimy preferencje, które są kategorią ekonomiczną i zajmiemy się problemami związanymi z agregacją preferencji i ich heterogenicznością.

Część teoretyczną zakończy prezentacja modelu losowej użyteczności i wynikającego z jego właściwości modelu behawioralnego, czyli modelu matematycznego opisującego zachowania jednostek w sytuacji wyboru.

1.1 Zbiór możliwych wyborów

Prawie każda czynność człowieka wymaga podejmowania decyzji, nawet podjęcie decyzji o jej niepodejmowaniu. Większość z nich człowiek wykonuje nieświadomie bez zastanowienia. W ramach kursu Analiza Wyborów Dyskretnych zostaną omówione sposoby formalnego modelowania sytuacji wyboru i wykorzystania w tym celu metod ilościowych. Tam, gdzie będzie to możliwe i wskazane zagadnienia teoretyczne będą ilustrowane przykładami empirycznymi.

W celu dokonania wyboru decydent musi określić zbiór dostępnych opcji wyboru (alternatyw). Zwyczajowo nazywamy je zbiorem możliwych wyborów. Aby doszło do sytuacji wyboru decydent musi mieć dostępne conajmniej dwie możliwości wyboru (alternatywy).

Decydentem jest jednostka podejmująca decyzję o wyborze. Może być to pojedyncza osoba, czy jednostka gospodarcza np. firma czy stowarzyszenie wówczas mówimy o wyborze indywidualnym, albo grupa osób taka jak gospodarstwo domowe, rodzina wtedy mamy doczynienia z wyborem grupowym.

Decydent stojąc przed problemem dokonania wyboru rozważa wybór jednej z dostępnych opcji ze zbioru dostępnych opcji wyboru (alternatyw) \mathcal{S} . Zbiór dostępnych dla decydenta możliwych wyborów \mathcal{S} powinien posiadać następujące własności:

1. alternatywy wzajemnie wykluczają się (rozłączność);
2. alternatywy wyczerpują cały zbiór \mathcal{S} (kompletność);
3. skończona liczba alternatyw;

ad. (1) jeśli dwie alternatywy "A" oraz "B" są niewykluczające to należy je redefiniować w taki sposób aby powstałe nowe alternatywy były rozłączne

- „tylko A”
- „tylko B”
- „A i B”

ad. (2) jeżeli alternatywy nie wyczerpują całego zbioru, to możemy dodać do zbioru dostępnych wyborów alternatywę nazwaną:

- „żadna z powyższych opcji” lub
- „inna alternatywa”

W ten sposób przekształcony zbiór wyborów \mathcal{S} będzie spełniał własności (1)-(3).

Modele wyborów dyskretnych znajdują zastosowanie w wielu obszarach ekonomii oraz innych dziedzin nauki.

Przykład 1 *Przykładowe sytuacje wyboru, które są modelowane z wykorzystaniem narzędzi analizy wyborów dyskretnych:*

- *wybór źródła zasilania domu w energię (prąd, gaz ziemny, ropa naftowa, źródła odnawialne)*

- *wybór środka transportu, np. na trasie Londyn - Paryż (samolot, autobus, pociąg, samolot)*
- *wyrażenie opinii w badaniu sondażowym (zgadzam się, nie mam zdania, nie zgadzam się)*
- *kupno w sklepie w ramach danej kategorii towaru produktu określonej marki*

Modelowanie decyzji jest utrudnione przez fakt, że decydent dokonując wyboru może nie rozpatrywać całego zbioru dostępnych alternatyw, a jedynie jego fragment. W literaturze dokonuje się rozróżnienia między zbiorem dostępnych opcji wyboru (alternatyw), zbiorem uświadamianych możliwości wyboru (alternatyw) (ang. *awareness set*) oraz zbiorem rozważanym (ang. *consideration set*). Część możliwych wyborów jest niedostępna dla decydenta, gdyż nie zdaje on sobie sprawy z ich obecności. Może też wystąpić sytuacja, w której decydent w sposób świadomy rezygnuje z pewnych możliwości wyboru.

1.2 Preferencje

Elementem łączącym wybór ekonomiczny z formalnym zapisem matematycznym wyborów dyskretnych jest teoria preferencji. Za jej pomocą można zidentyfikować i kwantyfikować czynniki wpływające na podejmowane decyzje. Słowo *preferencja* w potocznym języku oznacza, że jednostka skłania się za wyborem konkretnej opcji wyboru (alternatywy) s z dostępnego zbioru możliwych opcji wyboru (alternatyw) \mathcal{S} . Np. „preferuję podróżować samochodem niż autobusem”. W języku ekonomicznym preferencja oznacza, że po przypisaniu każdej możliwości wyboru (alternatywie) subiektywnej wartości, którą nazywamy *użytecznością*, możemy uporządkować (częściowo lub dobrze) zbiór możliwych wyborów (alternatyw). Określając najlepszy możliwy wybór należy brać pod uwagę występujące ograniczenia, które mogą uniemożliwić wybór najlepszej możliwości.

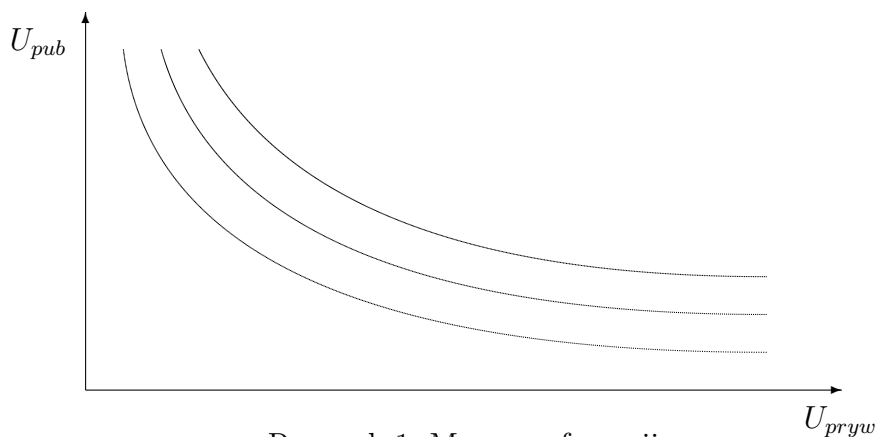
Przykład 2 *Wybór środka transportu* Osoba wybiera środek transportu w drodze do pracy. Dla uproszczenia przyjmijmy, że są dostępne tylko dwie alternatywy. Może wybrać:

- *transport prywatny (samochód)*
- *transport publiczny (autobus)*

Decydent podejmując decyzję bierze pod uwagę cechy dostępnych możliwości wyboru (alternatyw), oraz występujące ograniczenia. Niewątpliwie ograniczeniem dla alternatywy transport prywatny jest fakt posiadania samochodu. Jeżeli decydent nie posiada samochodu, nie ma wyboru. Załóżmy, że decydent samochód posiada i obie możliwości wyboru (alternatywy) są dla niego dostępne. W takim przypadku będzie rozpatrywał zestawy cech opisujących dostępne opcje wyboru (alternatywy). Najbardziej oczywistymi przykładami cech charakteryzujących podróż są czas podróży i koszt podróży. Oczywiście, w rzeczywistości decydent rozpatruje większą liczbę atrybutów, ponownie ograniczenie do dwóch wynika z uproszczenia.

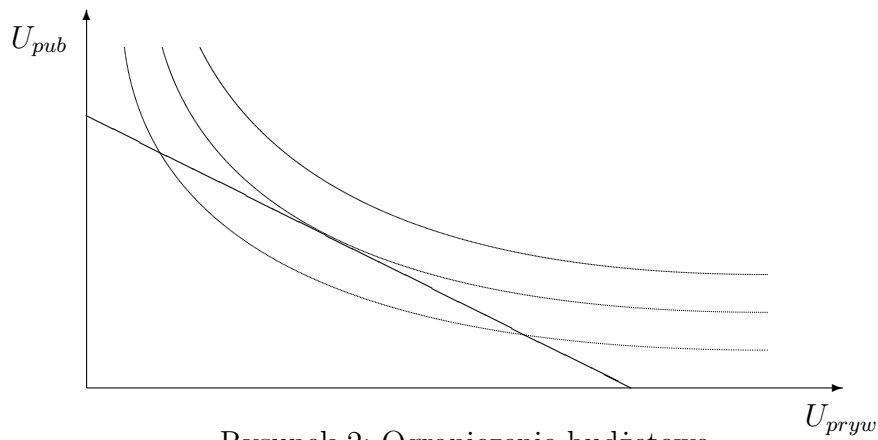
Kolejnym aspektem jest pomiar preferencji, czyli zbadanie wpływu atrybutów opcji wyboru, tutaj czasu podróży i kosztu podróży danym środkiem transportu, na wybór decydentą. Ponieważ niemożliwe jest zbadanie wszystkich możliwych par (czas podróży, koszt podróży) przeciw wszystkim (powstałby zbiór o mocy 2^c) respondentów są skłaniani do ujawnienia preferencji za pomocą pytań ankietowych. W sytuacji idealnej badane są wszystkie scenariusze. Jest to w zasadzie niemożliwe, ponieważ ich liczba może być bardzo duża, a do każdego scenariusza potrzebna jest o około 60 większa liczba obserwacji niż liczba charakterystyk kontrolnych umieszczonych w modelu, dla każdego decydentą budując osobny model (niemożliwe, z powodów oczywistych).

Gdy znane są wszystkie scenariusze i ich wyniki można stworzyć mapę preferencji.



Rysunek 1: Mapa preferencji

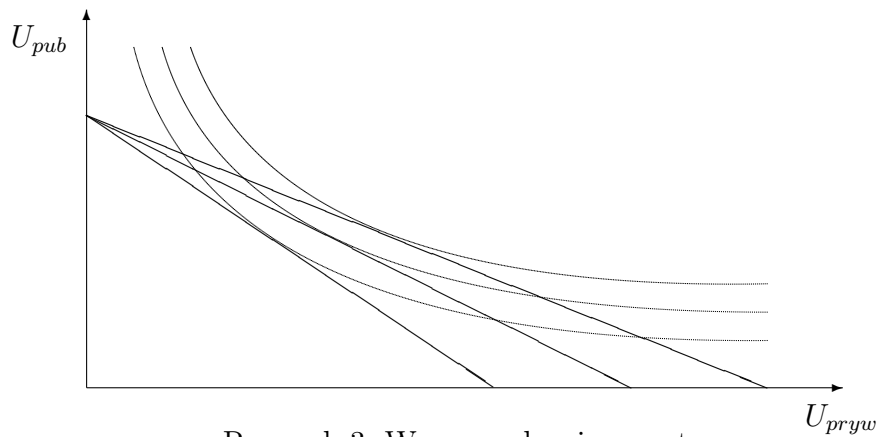
Podstawowym problemem ekonomii jest ograniczoność zasobów. Jednostka nie jest w stanie jednocześnie maksymalizować użyteczności z konsumpcji (posiadania) wielu dóbr, musi dokonać wyboru w ramach istniejącego *ograniczenia budżetowego*.



Rysunek 2: Ograniczenie budżetowe

Jednostka podejmując decyzję musi wziąć pod uwagę:

- dostępny budżet (B),
- jednostkowe ceny dostępnych opcji wyboru (P_{pub}, P_{pryw}),
- to czy jest cenodawcą czy cenobiorcą.



Rysunek 3: Wyprowadzenie popytu

W ramach analiza wyborów dyskretnych jednym z celów jest wyjaśnienie heterogeniczności preferencji. Założenia analizy

- stała technologia,
- ceteris paribus,
- decydent maksymalizuje użyteczność,

- problem "skłonności do zapłaty" *ang. willingness-to-pay* jest pomijany.

Model wyboru

- obserwowane są wybory jednostek,
- suma dokonanych wyborów tworzy popyt, ale
- wybór warunkowy, to wybór uwarunkowany innym czynnikiem, np. koniecznością odbycia podróży do pracy/na uczelnię. W przypadku wyboru warunkowego istotnym elementem jest prawidłowa identyfikacja zależności o charakterze przyczynowo-skutkowym.
- wybór bezwarunkowy, to taki, który nie jest uzależniony od wcześniejszych wyborów.
- wybór transportu w drodze do pracy jest warunkowany posiadaniem pracy poza domem
- wybór bezwarunkowy nie wymaga założeń wstępnych
- można skonstruować funkcję popytu bezwarunkowego przez zsumowanie funkcji popytu warunkowego po wszystkich wzajemnie wykluczających się alternatywach, które wyczerpują cały zbiór S .

1.3 Preferencje ujawnione i deklarowane

To który typ danych o preferencjach jest lepszy pozostaje kwestią dyskusyjną. Dane autentyczne są uważane za „czystsze”, są one bardziej cenione przez badaczy zajmujących się modelowaniem. Dane hipotetyczne mogą być obciążone z powodu występowania obserwacji nietypowych i problemów związanych z poprawnością polityczną, czy prezentowaniem się respondentów „w lepszym świetle”. Na przykład w Badaniu Budżetów Gospodarstw Domowych przeciętnie jedno gospodarstwo domowe rocznie na 36.000 badanych deklaruje wydatki na narkotyki, chociaż ze statystyk policyjnych wynika, że takich gospodarstw powinno być około 360.

Dane dotyczące preferencji ujawnionych (*ang. revealed preferences*) dotyczą rzeczywistych wyborów dokonywanych na rynku. Zawierają informacje o wyborach, które już się odbyły. Podstawową zaletą tego typu danych jest fakt, że dotyczą rzeczywistych wyborów. Te wybory są ograniczone przez rzeczywiste ograniczenia, takie jak zawartość portfela, czy dostępny czas wolny. W przypadku sytuacji hipotetycznych wprowadzenie realnych ograniczeń dla wyborów stanowi poważny problem. Dzięki temu dane dotyczące preferencji

ujawnionych są uważane przez badaczy za rzetelne źródło informacji. Z drugiej strony występują ograniczenia. Dokonane wybory można porównać jedynie z rzeczywistymi alternatywami występującymi w danym momencie na danym rynku. Ponadto, zazwyczaj opcje wyboru (alternatywy) są podobne, z uwagi na niewielkie zróżnicowanie ich cech charakterystycznych. Powoduje to problemy z identyfikacją szukanych parametrów modelu. Dodatkowo, bardzo trudno jest zdobyć informacje o nie wybranych alternatywach. Dwie pozostałe cechy danych o preferencjach ujawnionych mają podłoże finansowe. Po pierwsze, na rynku wśród towarów i usług występuje *trade-off* między ceną i jakością, który to efekt jest trudno kontrolować w przypadku tego typu danych. Po drugie, sam proces gromadzenia i przetwarzania danych jest czasochłonny i kosztowny. Innym problemem może być niska reprezentacja pewnych możliwości wyboru. Rozwiązaniem w takim przypadku jest technika Choice-Based Sampling, która pozwala uwzględnić w próbie większą liczbę respondentów wybierających daną alternatywę.

Dane dotyczące preferencji deklarowanych (oznajmionych) (ang. *stated preferences*) dotyczą zazwyczaj hipotetycznych sytuacji. Dzięki temu można respondentom przedstawić takie z góry przygotowane scenariusze, że zostanie wyeliminowany problem niskiej reprezentacji możliwych opcji wyboru (alternatyw). Ponadto, badacz ma dowolność w kształtowaniu wartości cech opcji wyboru (alternatyw) co pozwala na wygenerowanie pełnej mapy preferencji. Ale tutaj ograniczeniem jest ustalenie *a-priori* formy funkcyjnej funkcji użyteczności. Z drugiej strony bardzo trudno jest wprowadzić realistyczne ograniczenia, np. budżetowe, w obliczu hipotetycznego wyboru i nie ma pewności, że respondent postawiony w rzeczywistej sytuacji wyboru zachowałby się dokładnie w taki sposób, w jaki deklaruje.

2 Agregacja i heterogeniczność

Różne jednostki posiadają różne preferencje, inaczej oceniając te same możliwości wyboru (alternatywy). Istotą analizy wyborów dyskretnych jest wyjaśnienie zróżnicowania tych ocen. Należy tutaj zaznaczyć, że jednostka wie na jakiej podstawie dokonuje wyboru, jednak determinanty wyboru są nieobserwowane przez badacza, zna on jedynie efekt końcowy. Jeden student w czasie wolnym woli pójść na basen, inny na piwo, lecz badacz nie wie na jakiej podstawie i w jaki sposób te decyzje zostały podjęte.

Należy też wspomnieć, iż z uwagi na koszty zebrania odpowiednich danych i przeprowadzenia badania zazwyczaj nie jest badana cała populacja, a jedynie jej reprezentatywna próba. Pomimo faktu reprezentatywności, zawsze próbkowanie wprowadza niedokładność, która przekłada się na dodatkową

wariancję błędu.

Dodatkowym utrudnieniem jest fakt, iż zazwyczaj preferencje nie są stałe w czasie. Na przykład wraz z wiekiem zazwyczaj zmienia się poziom dochodu, a co z tym się wiąże zmieniają się preferencje odnoszące się do struktury konsumpcji. W rezultacie badacz musi rozwiązać przynajmniej dwa problemy

- problem (1) - identyfikacja czynników odpowiedzialnych za dokonywane wybory
- problem (2) - badacz z reguły nie obserwuje wielu czynników, które mają wpływ na podjęcie decyzji
- cel analizy \Rightarrow wyjaśnienie zachowania populacji (grupy jednostek)
- Rozwiązanie
 1. ograniczenie liczby analizowanych czynników i grupowanie podobnych cech, jednak wiąże się z nim ryzyko pominięcia czynników istotnych o znaczącym wpływie na poziom analizowanego zjawiska
 2. agregacja miar, np. uśrednienie dochodu czy czasu podróży na poziomie grupy; wiąże się z tym ryzyko, że za pomocą modelu uda się wyjaśnić dużą część niewielkiego zróżnicowania (uśrednionego), które w rzeczywistości jest dużo większe.

W obu rozwiązaniach pozostaje nieobserwowane zróżnicowanie, które wpływa na decyzję. Metodą pozwalającą uwzględnić to zróżnicowanie jest przyjęcie założenia, że posiada ono ZNANY rozkład.

2.1 Zapis formalny preferencji

W tym podrozdziale zostanie przedstawiona w sposób formalny funkcja użyteczności.

Relacją binarną (dwuczłonową) \mathcal{R} określoną na zbiorze X nazywamy każdy zbiór par uporządkowanych, którego elementy należą do zbioru X

$$\forall X \quad \mathcal{R} \subset X \times X$$

Zapisujemy $x\mathcal{R}x$.

Relację binarną \mathcal{R} nazywamy:

- spójną¹, jeżeli $\forall x, y \in X \quad x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$

¹Uwaga: w literaturze definicja relacji spójnej nie jest jednolita. Można spotkać również definicję: $\forall x, y \in X \quad x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x \vee x\mathcal{R}x$. Wg definicji użytej w tekście ze spójności relacji wynika jej zwrotność, według definicji alternatywnej nie.

- zwrotną, jeżeli $\forall x \in X \quad x\mathcal{R}x$
- przechodnią, jeżeli $\forall x, y, z \in X \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relację \mathcal{R} która jednocześnie spełnia aksjomaty spójności, przechodniości i zwrotności nazywamy relacją **słabej preferencji**.

Ćwiczenia sprawdzające

1. Proszę udowodnić, że spójność relacji implikuje jej zwrotność
2. Które aksjomaty spełnia relacja „bycia rodzeństwem” zdefiniowana na zbiorze ludzi?

Relację binarną R nazywamy:

- relacją ścisłych preferencji, jeżeli $x\mathcal{P}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \vee \sim y\mathcal{R}x$
- relacją indyferencji, jeżeli $x\mathcal{I}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$

Ćwiczenia sprawdzające: Pokaż, że $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{P}y \vee y\mathcal{I}x$

| Relacja | Zapis | |
|-------------------|-----------------|----------------|
| słaba preferencja | $x\mathcal{R}y$ | $x \succsim y$ |
| mocna preferencja | $x\mathcal{P}y$ | $x \succ y$ |
| Indyferencja | $x\mathcal{I}y$ | $x \sim y$ |

Relację binarną \mathcal{R} nazywamy:

- antysymetryczną $\forall x, y \in X \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow \sim (y\mathcal{R}x)$
- słabo antysymetryczną $\forall x, y \in X \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{I}y$

Relację \mathcal{R} zwrotną, słabo antysymetryczną i przechodnią nazywamy relacją częściowo porządkującą zbiór X .

Relację \mathcal{R} częściowo porządkującą i spójną nazywamy relacją porządkującą. Użyteczność jest to funkcja $u : X \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja użyteczności definiuje binarną relację

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Proszę sprawdzić czy funkcja użyteczności jest relacją słabej preferencji.

3 Model losowej użyteczności

Mówiąc o podejmowaniu decyzji i dokonywanych wyborach stwierdziliśmy, że w rzeczywistości występują czynniki, które są obserwowane oraz nieobserwowane. Obecnie wykorzystując formalny zapis matematyczny zdefiniowany w rozdziale (2.1) wprowadzimy notację, która umożliwi zdefiniowanie roli poszczególnych charakterystyk w determinowaniu poziomu użyteczności (satysfakcji) z dokonanego wyboru.

Niech U_i będzie całkowitą użytecznością związaną z wyborem alternatywy i . Biorąc pod uwagę abstrakcyjność pojęcia użyteczność, liczba jednostek użyteczności związana z daną alternatywą nie ma znaczenia. Poziom użyteczności jest porównywany z poziomem użyteczności wynikającym z wyboru innych alternatyw j , które pochodzą z tego samego zbioru możliwych wyborów \mathcal{S} .

Całkowita użyteczność związana z alternatywą i może być dekomponowana na część obserwowaną V_i oraz nieobserwowaną ε_i . Zakłada się, że te dwie składowe całkowitej użyteczności są niezależne i addytywne. Zatem można zapisać:

$$U_i = V_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

Decydent wybiera jedną spośród J dostępnych możliwości wyboru. Każdej możliwości przypisuje poziom użyteczności U_i $i = 1 \dots J$.

Kolejnym krokiem jest ustalenie w jaki sposób V_i oraz ε_i są przedstawione. Część V_i jest nazywana „reprezentatywnym składnikiem użyteczności”. Zawiera ona wagi, jakie decydenci przykładają do poszczególnych obserwowanych składników funkcji, oraz nieobserwowany poziom użyteczności specyficzny dla każdej alternatywy. O nieobserwowanej części użyteczności ε zakładamy, że dla każdego decydenta ma identyczny i nieznan rozkład prawdopodobieństwa.

Formalnie, jeżeli $f(\cdot)$ jest formą funkcyjną funkcji użyteczności, to (1) możemy przedstawić jako

$$U_i = \beta_0 + \beta_1 f(V_{1i}) + \beta_2 f(V_{2i}) + \varepsilon \quad (2)$$

We wzorze (2) pominięto subskrypt przy składniku nieobserwowanym, na mocy założenia o identycznym rozkładzie prawdopodobieństwa dla każdego decydenta. Ponadto, dla uproszczenia zapisu zakładamy, że $f(\cdot)$ jest identycznością, oraz że możliwa jest separacja funkcji użyteczności ze względu na jej czynniki

$$U_i = \beta_0 + \beta_1(X_{1o} | X_{1u}) + \beta_2(X_{2o} | X_{2u}) + \varepsilon \quad (3)$$

Każdy składnik funkcji zawiera część obserwowaną przez badacza (X_{1o}) i nieobserwowaną (X_{1u}). Zgodnie z przyjętymi założeniami możemy rozdzielić te części. Wówczas

$$U_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1o} + \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2o} + \beta_2 X_{2u} + \varepsilon \quad (4)$$

Porządkując uzyskujemy

$$U_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1o} + \beta_2 X_{2o} + \underbrace{\beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u}}_{\xi} + \varepsilon \quad (5)$$

Teraz możemy połączyć części nieobserwowane w jedną niewiadomą (składnik losowy). Jeżeli dodatkowo założymy, że nieobserwowany efekt ma identyczny rozkład, który jest niezależny od alternatyw to funkcję użyteczności będzie można oszacować za pomocą wielomianowego modelu wyboru dyskretnego.

$$U_i = \beta_0 + \beta_1(X_{1o}) + \beta_2(X_{2o}) + \xi$$

Przy spełnionym założeniu o racjonalności zachowań jednostek podczas wyboru jednej z możliwości, możemy wyprowadzić formalny mechanizm, który umieści to założenie w przestrzeni użyteczności. Założenie o racjonalności zachowań oznacza, że jednostka porównuje alternatywy i wybiera taką, która daje najwyższy poziom użyteczności (satysfakcji). Formalnie mówimy, że jednostki zachowują się zgodnie z zasadą maksymalizacji użyteczności.

Przyjęte założenia są restrykcyjne, ale z drugiej strony pozwalają na sformułowane następujących wniosków:

- czynniki nie uwzględnione w części obserwowanej funkcji użyteczności są z założenia w części nieobserwowanej i mają jednakowy wpływ na każdą alternatywę
- jeżeli występuje cecha wspólna dla dwóch lub większej liczby alternatyw sugeruje to występowanie korelacji (braku niezależności) między nimi

4 Model behawioralny

Teraz zdefiniujemy formalny model wyboru, w którym wartości parametrów odzwierciedlające wpływ poszczególnych charakterystyk społecznych i ekonomicznych decydentów na dokonany wybór będzie można oszacować. Decydent porównuje wszystkie alternatywy i wybiera najlepszą, która przynosi najwyższy poziom satysfakcji (użyteczności). Osoba budująca model wyboru posiada mniejszy zbiór informacji niż decydenci, gdyż obserwując zrealizowane wybory i cechy alternatyw oraz charakterystyki decydentów może pomijać

pewne istotne czynniki. W rezultacie może ona posługiwać się jedynie prawdopodobieństwem wyboru.

$$\Pr(Y = j) = \Pr(U_{nj} > U_{ni} \forall i \neq j) \quad (6)$$

Prawdopodobieństwo, że jednostka n wybierze alternatywę j jest nie mniejsze niż prawdopodobieństwo tego, że użyteczność przypisana tej alternatywie jest wyższa od użyteczności przypisanych pozostałym alternatywom. Ale w rzeczywistości badacz nie obserwuje wartości funkcji użyteczności, tylko atrybuty alternatyw i decydenta V_{nj}

Przykład 3 ($\forall i$)

Załóżmy, że modelujemy zakup konkretnego typu samochodu. Powiedzmy, że w Polsce jest dostępnych 100 modeli. Czy można zebrać sensowne dane, tak aby estymatory MNW miały pożądane właściwości (minimum po 100 zakupów jednego typu)?

Należy pamiętać, że zastosowaniu praktycznym teorii użyteczności towarzyszy problem ograniczonej racjonalności (ang. *bounded rationality*). Decydent wybiera najlepszą opcję spośród dostępnych, tj. takich, które zna. Składają się one na zbiór rozpatrywany (ang. *consideration set*). Decydent nie zawsze posiada pełną informację o wszystkich dostępnych możliwościach, oraz nie zawsze bierze pod uwagę wszystkie charakterystyki wyboru.

Jeżeli ze zbioru możliwych wyborów zostaną wyeliminowane, takie które rzadko występują, to ograniczenie zbioru możliwych wyborów, które ułatwia analizę spowoduje pojawienie się problemu ograniczonej racjonalności.

Dla badacza model wyboru opisany wzorem (6) jest równoważny z:

$$\Pr(Y = j) = \Pr(V_{nj} + \varepsilon_{nj} > V_{ni} + \varepsilon_{ni} \forall i \neq j) \quad (7)$$

Badacz konstruując model wyboru posługuje się cechami mierzalnymi możliwych wyborów, oraz informacjami o atrybutach, które nie są znane bezpośrednio ε_n . Z uwagi na składnik losowy ε_n model wyboru, w ramach którego podejmowana jest decyzja, nosi nazwę modelu losowej użyteczności (ang. *Random Utility Model*).

Grupując czynniki obserwowane po jednej stronie znaku nierówności a nieobserwowane po przeciwnej równanie (7) można przekształcić do postaci

$$\Pr(Y = j) = \Pr(V_{nj} - V_{ni} > \varepsilon_{ni} - \varepsilon_{nj} \forall i \neq j) \quad (8)$$

Następnie obserwowaną część użyteczności V_{nj} można zdekomponować na dwie składowe:

$$\forall j V_{nj} = V(X_{nj}, S_n)$$

- X_{nj} - cechy decydenta n wybierającego alternatywę j powiązane z tą alternatywą, oraz cechy alternatywy j
- S_n - cechy decydenta niezależne od alternatywy j

Użyteczność U_{nj} została zdefiniowana jako

$$U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj}$$

Badacz konstruując model traktuje ε_{nj} jako zmienną losową

$$\begin{aligned} \Pr(Y = j) &= \Pr(U_{nj} > U_{ni} \forall i \neq j) \\ &= \Pr(V_{nj} + \varepsilon_{nj} > V_{ni} + \varepsilon_{ni} \forall i \neq j) \\ &= \Pr(\varepsilon_{ni} - \varepsilon_{nj} < V_{nj} - V_{ni} \forall i \neq j) \\ &= \int_{\varepsilon} \mathbb{I}(\varepsilon_{ni} - \varepsilon_{nj} < V_{nj} - V_{ni} \forall i \neq j) f(\varepsilon_n) d\varepsilon \end{aligned}$$

Jeśli zostanie pominięty problem heterogeniczności decydentów to prawdopodobieństwo wyboru możliwości j upraszcza się do postaci

$$\int_{\varepsilon} \mathbb{I}(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_j - V_i \forall i \neq j) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Prawdopodobieństwo wyboru przez jednostkę alternatywy j jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że różnica pomiędzy relatywną użytecznością z części nieobserwowanej jest nie większa niż różnica w obserwowanej części użyteczności.

Pozostaje problem nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa składnika nieobserwowanego. W zastosowaniach przyjmuje się rozkład logistyczny, ponieważ dają się on wyrazić za pomocą wzoru analitycznego.

$$\Pr(\varepsilon_i - \varepsilon_j < \varepsilon) = \exp(-\exp(-\varepsilon))$$

Nazywany jest on rozkładem wartości ekstremalnych pierwszego typu, nosi również nazwę rozkładu logistycznego. Nazwa rozkład o wartościach ekstremalnych ma swoje źródło w tym, że posiada on grubsze ogony niż rozkład normalny, a co z tym się wiąże przy tym rozkładzie obserwacje znacznie różniące się od wartości przeciętnej pojawiają się częściej niż w przypadku rozkładu normalnego.

Przyjęcie rozkładu logistycznego dla nieobserwowanej części użyteczności oraz założenie o niezależności niezwiązanych alternatyw prowadzi do modelu

$$Pr(y = j) = \frac{\exp V_{jn}}{\sum_{i=1}^J \exp V_{in}}$$

Powyższy model nazywamy wielomianowym modelem logitowym. Jego forma analityczna wynika z przyjęcia założenia o niezależności niezwiązanych alternatyw. Jest ono dość restrykcyjne, ale jego osłabienie w tym momencie niepotrzebnie skomplikowałoby wyprowadzenie.

Zmienne objaśniające występujące w modelu można podzielić na dwie grupy: charakterystyki dostępnych alternatyw, oraz cechy społeczno-ekonomiczne respondentów. Typ dostępnych dla badacza zmiennych objaśniających jest do pewnego stopnia determinowany przez rodzaj modelowanych preferencji. W przypadku preferencji ujawnionych z reguły dostępne są szczegółowe informacje dotyczące alternatyw, natomiast w przypadku preferencji oznajmionych badacz dysponuje informacjami o decydentach.

Przykład 4 Wybór środka transportu

Decydent wybiera między transportem prywatnym a publicznym. Użyteczność z wyboru środka transportu zależy od dwóch jego cech: czasu podróży T oraz kosztu podróży K .

$$U_{pryw} = \alpha_R T_{pryw} + \beta_R K_{pryw}$$

$$U_{pub} = \alpha_U T_{pub} + \beta_U K_{pub}$$

Niech $V_{pryw} = 4, V_{pub} = 3$. Prawdopodobieństwo $(Y = pub) - Pr(\varepsilon_{pub} > \varepsilon_{pryw}) \Rightarrow \varepsilon_{pub} > \varepsilon_{pryw} > 1$

$$Pr_{pryw} = Pr(\varepsilon_{pub} - \varepsilon_{pryw} < V_{pryw} - V_{pub})$$

$$Pr_{pub} = Pr(\varepsilon_{pub} - \varepsilon_{pryw} > V_{pryw} - V_{pub})$$

Lecz pojawiają się pytanie co, w sensie behawioralnym, oznacza rozkład ε . Na to pytanie brak jest jednoznacznej odpowiedzi. Literatura sugeruje trzy interpretacje:

- (1) $f(\varepsilon)$ to nieobserwowalna przez badacza część użyteczności. Wtedy $Pr(Y = j)$ może być interpretowana jako procent populacji wybierający alternatywę j .
 - (2) $f(\varepsilon)$ może być subiektywną oceną badacza odnoszącą się do $Pr(Y = j)$
 - (3) $f(\varepsilon)$ zawiera czynniki nie rozpoznane przez decydenta, np. podświadomość.
- absolutny poziom użyteczności jest bez znaczenia dla decydenta i badacza

- wobec tego zidentyfikowane w modelu są wyłącznie parametry determinujące różnicowanie alternatyw

Przykład 5 *Stałe specyficzne dla alternatywy*

$$V_{nj} = X_{nj}\beta + k_j \quad (9)$$

k_j przeciętny wpływ czynników nie uwzględnionych w modelu na użyteczność alternatywy j .

$$\begin{cases} U_{pryw} = \alpha_R T_{pryw} + \beta_R K_{pryw} + k_{pryw} + \varepsilon_{pryw} \\ U_{pub} = \alpha_U T_{pub} + \beta_U K_{pub} + k_{pub} + \varepsilon_{pub} \end{cases}$$

Parametry powyżej przedstawionego modelu nie są jednoznacznie zidentyfikowane. W celu jego identyfikacji jedną ze stałych specyficznych dla alternatywy normalizowana jest do wartości zera. Wobec tego równoważnym modelem, którego parametry można w sposób jednoznaczny zidentyfikować, jest:

$$\begin{cases} U_{pryw} = \alpha_R T_{pryw} + \beta_R K_{pryw} + \varepsilon_{pryw} \\ U_{pub} = \alpha_U T_{pub} + \beta_U K_{pub} + k_{pub} + \varepsilon_{pub} \end{cases}$$

Literatura

- [1] David Hensher, John Rose, William Greene (2005) "Applied Choice Analysis", Cambridge UP
- [2] Kenneth Train "Discrete Choice Methods with simulations", do ściągnięcia z internetu.