# Teoria gier
# zbiorek zadań
Michał Krawczyk

DECYZJE INDYWIDUALNE

1. Zyski przedsiębiorcy zależą od poziomu popytu, którego nie da się przewidziec z pewnością. Przedsiębiorca szacuje natomiast, że prawdopodobieństwa poszczególnych poziomów: niskiego, średniego i wysokiego popytu wynoszą odpowiednio $p_n$, $p_s$, $p_w$. Przedsiębiorca rozważa trzy możliwe działania, które mogą przynieść różne zyski, zależnie od popytu. Załączona tabela zawiera odpowiednie wartości (w milionach złotych).

| strategia; popyt rynkowy | niski | średni | wysoki |
|---|---|---|---|
| zainwestować (Z) | 1 | 16 | 49 |
| trwać (T) | 9 | 16 | 36 |
| wycofać się (WS) | 16 | 16 | 16 |

   (a) Załóż, że f. użyteczności przedsiębiorcy dana jest wzorem $u(x) = x$. Dla każdej ze strategii podaj warunki na $p_n$, $p_s$, $p_w$, które muszą być spełnione by dana stratgia okazała się optymalna. Czy którąś ze strategii można z pewnością wykluczyć?

   (b) Załóż teraz, że wszystkie stany świata są jednakowo prawdopodobne. Którą strategie wybrałby przedsiębiorca maksymalizujący wartość oczekiwaną zysku?

   (c) A którą wybrałby przedsiębiorca o funkcji użyteczności $u(x) = x^{0.5}$?

2. Basia lubi jabłka i pomarańcze. Jest zawsze gotowa wymienić jedną pomarańcz na dokładnie dwa jabłka. Podaj trzy przykłady funkcji użyteczności, która poprawnie reprezentuje jej preferencje. W dwóch z nich wybierz formę funkcyjną, w której użyteczność nie jest liniową funkcją liczby konsumowanych owoców danego typu.

3. Czesław może dostać się z A do B przy pomocy roweru, autobusu lub samochodu. Podróż rowerem zawsze zajmuje 12 minut. Podróż autobusem

zajmuje 12 minut plus dodatkowo trzy minuty jeśli są korki. Podróż samochodem zajmuje 7 minut, ale ten czas podwaja się jeśli są korki. Jedynym celem Czesława jest dostać się do B jak najszybciej. Przedstaw tę sytuację w postaci macierzy, wskaż które decyzje są zdominowane słabo lub ściśle (przez które inne decyzje). Która decyzja jest najbezpieczniejsza?

GRY W POSTACI NORMALNEJ

4. W każdej z poniższych dwuosobowych gier wskaż

   (a) strategie słabo/ściśle dominujące

   (b) strategie najbezpieczniejsze

   (c) wszystkie równowagi Nasha

| | L | M | R |
|---|---|---|---|
| U | 0;2 | 2;0 | 3;6 |
| I | 4;1 | 0;2 | 2;0 |
| D | 1;2 | 3;0 | 5;1 |

| | L | M | R |
|---|---|---|---|
| U | 4;4 | 3;2 | 2;0 |
| I | 2;3 | 5;5 | -3;1 |
| D | -1;4 | 0;3 | 1;6 |

5. Przedstaw w postaci macierzowej duopol Cournota, w którym $p = max(7-q_1 - q_2, 0)$, $MC_1 = MC_2 = 1$. Wskaż w macierzy strategie słabo zdominowane. Potwierdź wynik korzystając bezpośrednio z funkcji zysku. Znajdź najlepsze odpowiedzi, przedstaw graficznie krzywą reakcji, wyznacz równowagę Nasha

6. Każda z trzech osób jednocześnie decyduje czy wykonać pewne zadanie. Wiąże się to z indywidualnym kosztem (niezależnym od tego czy inni je wykonają), ale jeśli nikt się nie podejmie, skutki będą katastrofalne dla wszystkich. Przedstaw tę symetryczną grę w postaci dwóch macierzy 2x2 z wypłatami pasującymi do opisu i znajdź jej równowagi.

7. Pracodawca zatrudnia pracownika, obiecując mu płacę $w$. Pracownik może się przykładać ($P$) albo obijać ($O$). Praca wiąże się z wysiłkiem $e$, gdzie $w > e > 0$. Jeśli pracownik się przykłada, pracodawca średnio uzyskuje

przychód $r$, w przeciwnym razie jedynie $\frac{r}{2}$. Przedsiębiorca nie może określić czy pracownik się przykłada czy nie, chyba, że przeprowadzi inspekcję ($I$), co kosztuje go $c$. Inspekcja wykaże z pewnością czy pracownik się przykłada czy obija; w tym ostatnim przypadku nie otrzyma pensji. Obie decyzje ($P/O$ i $I/BI$) podejmowane są jednocześnie.

(a) Przedstaw tę sytuację jako grę macierzową (pracownik jako gracz wierszowy)

(b) Jakie warunki muszą być spełnione by gra miała równowagę w strategiach czystych?

(c) Przyjmij, że te warunki NIE są spełnione. Wyznacz wzory na prawdopodobieństwo przykładania się, $p$ i prawdopodobieństwo inspekcji, ($q$), w równowadze w strategiach mieszanych.

(d) Załóż, że $w = 5, e = 3, r = 10, c = 2$. Znajdź równowagę (możesz skorzystać z wcześniejsznych wyników).

(e) Przy tych samych danych załóż, że pracodawca może skuteczne zobowiązać się z góry do pewnego prawdopodobieństwa inspekcji. Czy może w tej sytuacji osiągnąć wyższą wypłatę niż w powyższej równowadze? Jakie prawdopodobieństwo inspekcji powinien wybrać? Skomentuj różnicę w stosunku do wypłaty w równowadze.

8. (Malawski) Partnerzy w dwuosobowej spółce niezależnie od siebie decydują o poziomach wysiłku wkładanego w działalność spółki. Przy poziomach wysiłku $e_1$ i $e_2$ spółka przynosi dochód $P(e_1, e_2) = 4(e_1 + e_2 + \frac{e_1 e_2}{4})$, który wspólnicy dzielą po połowie. Koszt wysiłku $e_i$ dla gracza $i$ wynosi $e_i^2$. Przyjmujemy, że $e_1$ i $e_2$ mogą być dowolnymi liczbami z przedziału $[0, 4]$.

(a) Wyznacz równowagę Nasha tej gry i dochód spółki w tej równowadze.

(b) Jaki jest maksymalny możliwy dochód spółki (netto) i przy jakich strategiach jest osiągany?

(c) Pokaż, że strategie $e_1 = 0,5$ oraz $e_2 = 3$ są zdominowane.

9. Rozważmy dwie firmy konkurujące na rynku homogenicznego dobra. Obie jednocześnie wybierają ceny, $p_1$ i $p_2$ – dowolne liczby rzeczywiste z zakresu $[0, 100]$. Każdy konsument kupuje od firmy oferującej najniższą cenę (przy

czym popyt dzieli się na pół gdy ceny są dokładnie takie same). Firmy produkują po kosztach krańcowych, odpowiednio, $c_1$ i $c_2$, gdzie $0 \leq c_1 < c_2 \leq 100$. Nie ma kosztów stałych. Kazda z firm maksymalizuje zatem $q_i(p_i - c_i)$, gdzie $q_i$ oznacza listę sprzedanych jednostek. Popyt rynkowy dany jest wzorem $D(p) = 100 - p$.

(a) Dla każdej z firm znajdź cene monopolisty (tj. taką, którą ustanowiłaby, gdyby była sama na rynku)

(b) Zdefiniuj grę jednoczesną między dwiema firmami: jakie mają strategie, jak wypłaty zależą od strategii? Czy jest to zależność ciągła czy wypłata może się skokowo zmienić przy małej zmianie ceny?

(c) Czy zawsze istnieje najlepsza odpowiedź? Czy istnieje równowaga Nasha w straegiach czystych? Czy istnieje równowaga w stratechiach nie-zdominowanych? (rozróżnij dwa przypadki: $c_1 = c_2$ i $c_1 < c_2$).

(d) Odpowiedz na powyższe pytania gdy dozwolone są tylko ceny całkowite: $(0, 1, 2, \ldots, a)$. Załóż, że $c_1$ i $c_2$ także są całkowite.

10. Znajdź równowagi w strategiach czystych i mieszanych w następujących grach:

| | Left | Right |
|---|---|---|
| Up | 1,2 | 4,2 |
| Down | 2,4 | 1,3 |

| | Left | Right |
|---|---|---|
| Up | 4,2 | 1,3 |
| Down | 2,3 | 2,2 |

| | Left | Center | Right |
|---|---|---|---|
| Up | 1,2 | 4,2 | 4,1 |
| Down | 2,4 | 1,3 | 2,0 |

11. Atak lotniczy (Osborne i Rubinstein). Armia A dysponuje jednym samolotem, który może zaatakować jeden z trzech celów. Armia B ma jedno samobieżne działo przeciwlotnicze, które może usytuować w jednym z tych celów. Wartości strategiczne tych trzec celów określono jako $v_1 > v_2 > v_3 > 0$. Jeśli cel $i$ jest niebroniony i zostanie zaatakowany, armia A zyskuje, a armia B traci $v_i$. Zapisz tę interakcję jako grę macierzową, znajdź równowagę

w strategiach mieszanych. (Podpowiedź: nie ma pewności, które strategie w ogóle będą używane. Najpierw wykaż, że nie ma równowagi w strategiach czystych. Udowodnij, że w równowadze gracz A będzie wykorzystywać strategię 1 z dodatnim prawdopoobieństwem ($p_1 > 0$). Następnie wykaż, że jeśli gracz A będzie używać strategiii 3 z dodatnim prawdopodobieństwem, to także strategii 2. Nadto, że w równowadze nie może zachodzić $p_1 = 1$. Szukamy zatem dwóch typów równowagi: $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 = 0$ i $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$. Jakie (nie)równości winny spełniać oczekiwane wypłaty z poszczegególnych strategii w tych równowagach? Czy zawsze będą istnieć oba typy, czy zależy to od wartości $v_i$?

12. (*) Rozważ rynek z dwoma firmami produkującymi to samo dobro. Jednocześnie wybierają ceny $p_1$ i $p_2$ ze zbioru nieujemnych liczb rzeczywistych. Załóż, że koszty produkcji są zerowe. Jeśli $p_i < p_j$, wtedy popyt na produkt firmy $i$ wyniesie $D(p_i)$, a popyt na produkt firmy $j$ wyniesie 0. Podzielą się po równo w przypadku jednakowych cen. Funkcja popytu dana jest wzorem $D(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p}}$.

    (a) Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych

    (b) Znajdź symetryczną równowagę Nasha w strategiach mieszanych, w której gracze wybierają cenę z rozkładu o nośniku $[p_{min}, \infty)$ (czyli żadna cena poniżej $p_{min}$ nie zostanie wybrana, ale każda równa lub większa niż $p_{min}$ czasem zostanie wybrana). [HINT: jaka jest oczekiwana wartość zysku gracza wybierającego $p = p_{min}$? Jaka zatem jest oczekiwana wartość zysku dla dowolnego $p > p_{min}$? Na tej podstawie możesz wyznaczyć szansę sprzedania czegokolwiek po cenie $p$, co określi dystrybuantę równowagowej strategii mieszanej. Czy to się uda dla każdej $p_m in$ Czy oczekiwane wypłaty są jednakowe we wszystkich równowagach?

GRY Z NIEDOSKONAŁĄ INFORMACJĄ

13. Dwie firmy jednocześnie decydują czy walczyć o pewien rynek czy zrezygnować. Jeśli walczą, silniejsza firma wygra. Wygrywający otrzymuje wypłatę 1, przegrywający wypłatę minus 1. Jeśli tylko jedna jest gotowa walczyć, otrzymuje wypłatę 1. Firma zawsze otrzyma wypłatę 0 rezygnując z walki.

(a) Przedstaw tę sytuację w postaci dwóch macierzy: pierwszej dla przypadku gdy Firma 2 jest silniejsza, a drugiej dla przypadku gdy Firma 2 jest słabsza. Czy są to gry ściśle konkurencyjne? Znajdź ich równowagi.

(b) Załóż teraz, że Firma 1 nie wie czy Firma 2 jest silniejsza czy słabsza, przypisuje jedynie prawdopodobieństwo 0,4 do pierwszej z tych możliwości. Firma 2 zna swój typ. Znajdź równowagę Bayesa-Nasha (strategie dla firmy 1 i każdego z typów firmy 2, których nie opłaca się zmieniać biorąc pod uwagę aktualne strategie innych).

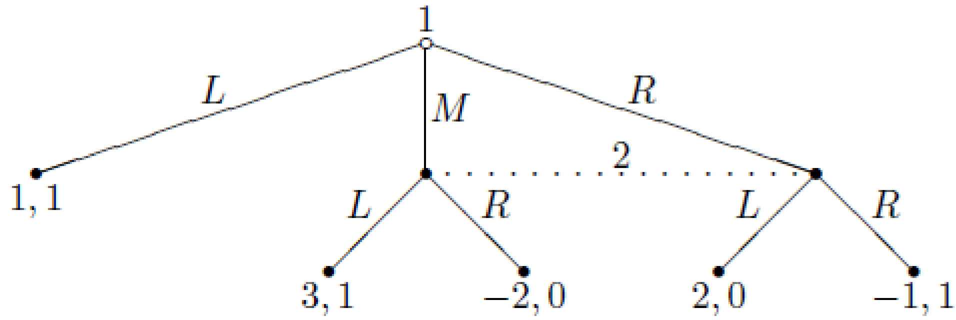
(c) To samo zadanie, tylko inne aprioryczne przekonanie Firmy 1 – teraz przypisuje silnemu typowi Firmy 2 prawdopodobieństwo 0,7.

14. (Levine) Stephen J. Seagull musi zadecydować czy zrobić nowy film. Jeśli decyzja jest negatywna, zarówno on jak i Clod VandeCamp otrzymują użyteczność 10. Jeśli pozytywna, SJS i CVC muszą jednocześnie zadecydować kogo chcą na reżysera: George'a Spellbindera czy Eda Tree. Jeśli nie skoordynują swoich wyborów, film nie powstanie, a wskutek straty czasu każdy osiągnie użyteczność 0. Jeśli obaj wybiorą Spellbindera, film będzie sukcesem i ich użyteczności wyniosą po 20. Jeśli obaj wybiorą Eda Tree, film będzie słaby, a użyteczności wyniosą po 5. Przedstaw grę w postaci ekstensywnej (drzewka) i normalnej (macierzy). Znajdź wszystkie równowagi Nasha. Które z nich są stabilne względem podgier? Zastosuje koncept eliminacji słabo zdominowanych strategii i koncept indukcji wprzód (*forward induction*).

15. (Osborne i Rubinstein) Sformułuj poniższą zabawę jako grę dynamiczną z niedoskonałą informacją. Najpierw Gracz 1 otrzymuje kartę, z jednakowym prawdopodobieństwem Wysoką (W) lub Niską (N). Tylko on wie, którą otrzymał. Gracz 1 ogłasza, że karta jest N i płaci Graczowi 2 jeden zł, albo że karta jest w. Wówczas Gracz 2 może się poddać, albo zażądać pokazania karty. Jeśli się podda, płaci 1 zł graczowi 1. Natomiast jeśli zażąda pokazania karty, płaci mu 4 zł, jeśli jest faktycznie W i otrzymuje od niego 4 zł jeśli jednak jest N. Znajdź równowagi tej gry.

16. Znajdź doskonałe równowagi bayesowskie gry przedstawionej na rysunku.

Rysunek 1:




17. (Levine) Prezydent USA Bert C. Tree wkrótce będzie negocjował porozumienie pokojowe z premierem Hapistanu. Premier sądzi, że Prezydent Tree reprezentuje jeden z dwóch typów: jest Normalny (N) albo Szalony (S). Prawdopodobieństwo typu N oznaczmy przez $p$. Zanim rozpoczną się negocjacje, Prezydent Tree może zbombardować inny kraj. Koszt takiej decyzji dla Prezydenta Tree wynosi zero jeśli reprezentuje typ S i 1 w przypadku typu N. Następnie Premier może złożyć Prezydentowi dobrą propozycję (użyteczność $D > 0$ dla Prezydenta) lub złą (użyteczność 0). Wypłata dla Premiera wynosi 1 gdy da typowi S dobrą propozycję albo typowi N złą propozycję i 0 w przeciwnym wypadku.

    (a) Narysuj drzewo gry

    (b) Znajdź równowagi Nasha w strategiach czystych dla (przedziałów) możliwych wartości $p$ i $D$.

    (c) Znajdź równowagę Nasha w strategiach mieszanych dla wartości $p = 3/4$ i $D = 2$.

    (d) Spośród powyższych podaj przykłady równowag łączących, separujących i hybrydowych (jeden typ wykonuje jedną akcję, a drugi miesza).

GRY POWTARZALNE

18. (Levine) Rozważ grę, w której Nowy Gracz musi zdecydować czy wejść na rynek. Jeśli nie wejdzie, Gracz Zasiedziały otrzymuje wypłatę 2, a Nowy 0. Jeśli wejdzie, Zasiedziały wybiera między walką a współpracą. Jeśli walczy,

| | S1 | S2 |
|---|---|---|
| S1 | 2,2 | 0,3 |
| S2 | 1,2 | 1,1 |

obie firmy otrzymują $-1$. Jeśli współprace, obie otrzymują 1. Przypuśćmy, że taka gra powtarzana jest w nieskończoność przez nieśmiertelnego Zasiedziałego o współczynniku dyskonta $\delta$ z kolejnymi Nowymi (z których każdy trwa tylko jeden okres).

(a) Podaj postać ekstensywną (drzewka) i normalną (macierzową) *stage game*.

(b) Jaka jest SPNE tej gry?

(c) Jakie inne (nie-stabilne względem podgier) równowagi ma ta gra? Co je charakteryzuje w porównaniu z SPNE?

(d) Czy powtarzanie SPNE *stage game* niezależnie od historii stanowi SPNE supergry?

(e) Dla jakich wartości $\delta$ następujące strategie stanowią SPNE: dopóki zasiedziały nigdy nie wybrał współpracy w przeszłości, Nowi nie wchodzą, a Zasiedziały walczy o ile jednak wejdą. Natomiast jeśli zasiedziały choć raz w przeszłości współpracował, Nowi wchodzą, a Zasiedziały współpracuje.

19. Dla poniższych gier przedstaw w postaci nierówności i w postaci graficznej zbiór średnich dyskontowanych wypłat, które mogą być osiągnięte przez graczy w równowadze stabilnej względem podgier supergry, w której dana gra macierzowa jest (jako *stage game*) rozgrywana

(a) trzykrotnie

(b) $T$-krotnie (możesz założyć, że $T$ jest nieparzyste)

(c) w nieskończoność

z jednakowym dla obu graczy współczynnikiem dyskonta $\delta$.

AUKCJE

| | S1 | S2 | S3 |
|---|---|---|---|
| S1 | 0,0 | 2,1 | 3,0 |
| S2 | 1,2 | 0,0 | 3,0 |
| S3 | 0,3 | 0,3 | 2,2 |

20. (*) Przypadek awersji do ryzyka. Rozważmy kupujących wykazujących awersję do ryzyka, $U_i(x) = x^{\alpha_i}$, gdzie $1 > \alpha_i > 0$. Wykaż, że w aukcji pierwszej ceny strategią równowagową jest

$$b_i(v_i) = \frac{n-1}{n-1+\alpha_1} v_i.$$

21. Porównanie formatów aukcji. Trzech neutralnych wobec ryzyka graczy konkuruje w aukcji kopertowej. Ich wyceny dobra są niezależne, jednostajne na $[0, 1]$. Wynoszą akurat $v_1 = 0,7, v_2 = 0,9, v_3 = 0,2$ (choć każdy zna tylko swoją wycenę). Korzystając ze stosownych wzorów poznanych na wykładzie oblicz jakie zostaną złożone oferty, kto wygra aukcję i ile zarobi aukcjonariusz w przypadku aukcji:

    (a) pierwszej ceny

    (b) drugiej ceny

    (c) $a$ll-pay?

    Skomentuj wynik w świetle RET.

22. Korzystając z RET udowodnij, że w aukcji trzeciej ceny, w przypadku jednego dobra (zob. HW3), licytowanie $b = v$ nie stanowi równowagi.

23. Kupujący $i$, $i = 1, 2$ wycenia przedmiot aukcji na $v_i$, losowane niezależnie z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$.

    (a) Sprzedający organizuje aukcję pierwszej ceny. Zakładając, że kupujący korzystają z liniowych strategii, tj. $b_i(v_i) = a_i v_i, i = 1, 2$, gdzie $a_i$ jest dodatnią stałą, znajdź równowagę (tj. wartości $a_1, a_2$).

    (b) Załóż teraz, że sprzedający korzysta z aukcji malejącej: ceny idą w dół aż któryś z kupujących powie "stop" kupując po tej cenie. Znajdź równowagę.

(c) Załóż teraz, że Kupujący 2 ma prawo kupić po cenie zaproponowanej przez Kupującego 1: K1 składa swoją ofertę $b_1$, po czym K2 kupuje po tej cenie lub rezygnuje (a wówczas po tejże cenie kupuje K1). Znajdź SPNE.

(d) Czy istnieją równowagi Nasha w punkcie C, które nie są stabilne względem podgier? (hint: niewiarygodne groźby).

(e) Porównaj przychody osiągane przez sprzedającego w przypadkach a) i c). Czy RET się stosuje? Jeśli nie: czemu nie?

24. Każdy z trzech kupujących obserwuje prywatny sygnał $s_i$ wylosowany niezależnie z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$. Wartość dobra wynosi $V = s_1 + s_2 + s_3$.

(a) Rozważ aukcję rosnącą (japońską). Jaka jest maksymalna kwota, którą kupujący może bezpiecznie zalicytować zakładając, że nikt inny jeszcze nie zrezygnował?

(b) Korzystając z argumentów analogicznych do tych przedstawionych na wykładzie wykaż, że w równowadze kupujący z najniższym sygnałem, $s_{(3)}$, powinien przy tej właśnie kwocie zrezygnować.

(c) W jaki sposób zmienią się przekonania pozostałych na temat wartości dobra?

(d) Jaką wielkość mogą teraz bezpiecznie licytować pozostali?

(e) Wykaż, że przy tej właśnie kwocie zrezygnuje kupujący o środkowym sygnale.

(f) Kto zrezygnuje przy jakiej cenie i ile wyniesie przychód sprzedającego jeśli sygnały wynoszą $s_1 = 0,6, s_2 = 0,8, s_3 = 0,4$?

(g) A jakie oferty złożyliby kupujący zaobserwowawszy takie sygnały w aukcji drugiej ceny i ile wyniósłby wówczas przychód sprzedającego?

NEGOCJACJE

25. Dwóch graczy. Ciastko warte jest 1 w pierwszym okresie, w kolejnych dyskontowane z użyciem $\delta$. W okresach nieparzystych propozycję podziału składa gracz 1 z prawdopodobieństwem $p > .5$, w przeciwnym razie gracz

2. W parzystych odwrotnie. To, kto składa propozycję jest losowane bezpośrednio przed propozycją. Gra kończy się gdy propozycja zostanie przyjęta, a wpp proceduje do następnego okresu. Znajdź stacjonarną, stabilną względem podgier równowagę w przypadku

   (a) Dwóch okresów (po odrzuceniu drugiej oferty obaj dostają zero)

   (b) Nieskończonej liczby okresów

26. Dwóch graczy. Cztery niepodzielne, jednakowe ciastka. W kolejnych dyskontowane z użyciem $\delta$. W okresach nieparzystych propozycję podziału składa gracz 1, w parzystych gracz 2. Gra kończy się gdy propozycja zostanie przyjęta, a wpp proceduje do następnego okresu. Znajdź stacjonarną, stabilną względem podgier równowagę w przypadku

    (a) Dwóch okresów (po odrzuceniu drugiej oferty obaj dostają zero)

    (b) Nieskończonej liczby okresów

27. Dwóch graczy. Ciastko warte jest 1 w pierwszym okresie, przejście do kolejnego zawsze wiąże się z kosztem $c$ dla każdego z graczy. W okresach nieparzystych propozycję podziału składa gracz 1, w parzystych gracz 2. Gra kończy się gdy propozycja zostanie przyjęta, a wpp proceduje do następnego okresu. Znajdź stacjonarną, stabilną względem podgier równowagę w przypadku

    (a) Dwóch okresów (po odrzuceniu drugiej oferty obaj dostają zero)

    (b) Nieskończonej liczby okresów

    Do czego dążą równowagowe wypłaty gdy $c$ dąży do zera? Zinterpretuj ten wynik.